PRÄSENZÜBUNGEN 5: Rechnen wie die Fourien!

Für die Gruppenübungen am 21.–24. November 2017

1 Ja? Nein? Warum? Beantworten Sie folgende Fragen bzw. bewerten Sie die folgenden Aussagen mit wahr oder falsch. Begründen Sie (durch ein Ergebnis aus Ihrer Vorlesung) oder widerlegen Sie (durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus).

(a) Erlaubt ein C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$, dann ist f rotationsfrei.

(b) Ist ein C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^n \supset U \to \mathbb{R}^n$ rotationsfrei, dann erlaubt f ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$.

(c) Gilt $\oint_\gamma f \cdot \mathrm{d}s = 0$ für jedes rotationsfreie C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$?
Gilt dies auch für $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$? und für $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$?

(d) Jedes C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^2 \setminus \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^2$ mit $\partial_1 f_2 = \partial_2 f_1$ hat ein Potential.

(e) Jedes C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus \overline{B}(0,1) \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential.

(f) Jedes C^1–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \setminus A \to \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ hat ein Potential; hier ist A die z-Achse.

(g) Gilt $\int_S \operatorname{rot} f \cdot \mathrm{d}S = 0$ für jedes Kompaktum $V \subset \mathbb{R}^3$ mit stückweise glattem Rand $S = \partial V$ und jedes C^2–Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$? Lässt sich Gauß anwenden? Lässt sich Stokes anwenden?

(h) Sei $U \subset \mathbb{R}^3$ offen und $K \subset \mathbb{R}^3$ kompakt mit stückweise glattem Rand $S = \partial K \subset U$. Gilt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = 0$ für jedes divergenzfreie C^1–Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$?

2 … ausgrechnet Fourier… ausgrechnet Fourier… ausgrechnet Fourier…

(a) Sind die folgenden Funktionen gerade oder ungerade oder weder noch? Sind sie periodisch? Wenn ja, bestimmen Sie die kleinste Periode T und damit die Grundfrequenz ω:

$$|x^3|, \quad x + x^2, \quad \cos x, \quad \cos(\pi x), \quad \sin(nx), \quad x\sin(nx), \quad \cos\Big(\frac{2\pi x}{k}\Big), \quad \sin(x)^2.$$

(b) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch und für $-\pi < x \le \pi$ gegeben durch

$$(1)\ f(x) = |x|, \quad (2)\ f(x) = x + |x|, \quad (3)\ f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}, \quad (4)\ f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } -\pi < x < 0, \\ \mathrm{e}^{-x} & \text{falls } 0 \le x \le \pi. \end{cases}$$

Skizzieren Sie f auf $[-3\pi, 3\pi]$; markieren Sie sorgfältig die Werte an den Sprungstellen.

(c) In welchen Punkten $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Fourier–Reihen zu (b) und wogegen? gegen $f(x)$?

(d) Bestimmen Sie die komplexen und die reellen Fourier–Koeffizienten ($c_k \in \mathbb{C}$ bzw. $a_k, b_k \in \mathbb{R}$) der Funktion aus (b4). Welche Reihe mit welchem Grenzwert ergibt die Auswertung in $x = 0$?

3 … gerade Fourier… ɹǝᴉɹnoℲ ǝpɐɹǝƃ… gerade Fourier… ɹǝᴉɹnoℲ ǝpɐɹǝƃ…
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und 2π-periodisch mit $f(x) = \pi - x$ für $x \in [0, \pi]$.

(a) Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Konvergiert die Fourier–Reihe von f überall gegen f?

(c) Berechnen Sie die reelle Fourier–Reihe von f. Warum müssen Sie für b_k gar nicht rechnen?

(d) Berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, indem Sie die Fourier–Reihe geeignet auswerten.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich unsere Kommentare als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Aufgabe 1: Ihre mathematischen Werkzeuge sind extrem präzise und vielseitig einsetzbar. Sie müssen sie ausgiebig einüben, typische Probleme lösen und dabei Ihre Fragen klären. Nur so geht's.

Hierzu dient auch diese Wiederholung. Sie kennen inzwischen die Integralsätze in der Ebene und im Raum und wollen / sollen / müssen diese sicher und korrekt anwenden. Sie brauchen die zugrundeliegende Theorie *und* die Beispiele: Sätze erklären Ihnen die Techniken, Beispiele illustrieren mögliche Anwendungen und Gegenbeispiele warnen vor typischen Fehlanwendungen.

Bei diesem Frageformat „Ja? Nein? Warum?" müssen Sie alle relevanten Sätze und Beispiele parat haben. Dies hat sich auch in Klausuren bewährt: Es belohnt diejenigen mit leicht und schnell verdienten Punkten, die die Vorlesung und die Übungen ernsthaft bearbeiten.

Periodische Vorgänge sind überall: Puls, Tag & Nacht, Jahreszeiten, Schwingungen, Schall... Das menschliche Ohr ist nicht bloß ein Mikrophon! Trommelfell, Hammer, Amboss, Steigbügel, Schnecke, Haarzellen bilden ein phantastisch raffiniert ausgeklügeltes Sinnesorgan: Es zerlegt alles Gehörte in Frequenzen zwischen 20Hz und 20kHz. Ihr Innenohr ermittelt eine Fourier–Analyse!

Die Fourier–Analyse hat wichtige technische Anwendungen: Datenanalyse (Mustererkennung, Spracherkennung), Datenkompression (Herausfiltern relevanter Frequenzbereiche), Digitalisierung von Ton- und Bilddaten (MP3, JPEG, FFT). Sie ist zudem ein universelles Werkzeug: Wir zerlegen damit komplizierte Funktionen in einfache Basisfunktionen, etwa zur optimalem Approximation oder zur Lösung von Differentialgleichungen. Dazu hat Joseph Fourier sie vor zweihundert Jahren erfunden, er löste damit seine Wärmeleitungsgleichung in den ersten praktisch relevanten Fällen. Diese Technik funktioniert auch heute noch wunderbar, sogar mehr denn je.

Aufgabe 2: Eigenschaften wie *gerade*, *ungerade*, *periodisch* sind ungemein hilfreich. Sie erkennen sie schnell... nach einigem Üben (2a). Bevor Sie eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (als Signal) analysieren, sollten Sie sie zunächst einmal zeichnen und so anschaulich machen (2b). Sie lesen hieran bereits entscheidende Informationen ab (2c), bevor Sie sich dann an die sorgsame Rechnung wagen (2d). Umgekehrt: Wer die Funktion nicht skizzieren kann, dem misslingt wohl auch die Rechnung.

Aufgabe 3 (ebenso 4 und 5): Sie folgen demselben Schema: Funktion skizzieren (3a) und passende Konvergenzsätze nutzen, insbesondere Dirichlet (3b), dann Fourier–Koeffizienten berechnen (3c), schließlich auswerten (3d). Genauer: Dank (3b) wissen Sie, in welchen Punkten $x\in\mathbb{R}$ die Fourier–Reihe (3c) konvergiert und kennen jeweils ihren Grenzwert. Wenn Sie nun einen geeigneten Punkt $x\in\mathbb{R}$ wählen, erhalten Sie die gefragte Reihe und können so ihren Grenzwert berechnen (3d).

Aufgabe 4: Sie können in (4a) versuchen, direkt die Fourier–Integrale auszurechnen, aber das ist mühsam. Suchen Sie einen besseren Weg: Nutzen Sie, was Sie in der HM2 gelernt haben!

Aufgabe 5: Die Periode 2π ist bequem, realistisch ist eine beliebige Periode $P>0$. Sie können natürlich beides leicht ineinander umrechnen, hier üben wir es einmal direkt. Das geht genauso gut.

Aufgabe 6: Die Parseval–Gleichung wird auch *Energiegleichung* genannt, denn sie verbindet die L^2–Norm des Signals f mit der ℓ^2–Norm des Spektrums $\hat{f}$. Dies können Sie hier an konkreten (und recht übersichtlichen) Beispielen üben. Fourier–Theorie liefert eigentlich immer schöne Ergebnisse.

HAUSÜBUNGEN 5: Fourier yippie-ya-yeah![1]

Abzugeben in den Gruppenübungen am 28. November – 1. Dezember 2017

4 ... endlich Fourier... Fourier endlich... endlich Fourier... Gegeben seien die 2π-periodischen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(3x)\cos(x) - \cos(x)^3 \sin(4x)$ und $g(x) = f(x) + \cos^2(x)$.

(a) Bestimmen Sie die komplexen und reellen Fourier–Koeffizienten von f und g.

(b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Fourier–Reihen gegen die Funktion f bzw. g?

(c) Seien f' und g' die Ableitungen sowie $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ und $G(x) = \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t$ die Integralfunktionen von f und g. Entscheiden Sie für jede dieser vier Funktionen $f', g', F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ob sie gerade, ungerade bzw. 2π-periodisch sind.

(d) Berechnen Sie falls möglich die reellen Fourier–Koeffizienten zu diesen Funktionen.

5 ... schon wieder Fourier... schon wieder Fourier... schon wieder Fourier...
Sei $0 < L$ und $P = 2L$. Sei $h : [0, L] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{L}x & \text{falls } 0 \le x \le \frac{L}{2}, \\ \frac{2}{L}(L - x) & \text{falls } \frac{L}{2} \le x \le L. \end{cases}$$

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei P–periodische Fortsetzungen, und zwar f gerade (durch Achsenspiegelung) und g ungerade (durch Punktspiegelung).

(a) Skizieren Sie f und g auf dem Interval $[-2P, 2P]$.

(b) Formulieren Sie Abbildungsvorschriften für f und g auf dem Interval $[0, P]$.
Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die Fourier–Reihen gegen die Funktion f bzw. g?

(c) Berechnen Sie die Fourier–Reihen von f und g.

(d) Werten Sie die Fourier–Reihe von f an geeigneter Stelle $x \in \mathbb{R}$ aus und berechnen Sie

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{18^2} + \dots$$

6 ... jetzt auch noch Parseval... jetzt auch noch Parseval... jetzt auch noch Parseval...

(a) Zitieren Sie aus der Präsenzaufgabe 3 die reelle Fourier–Reihe der 2π-periodischen geraden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \pi - x$ auf $[0, \pi]$. Nutzen Sie nun die Parseval–Gleichung zur Berechnung der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.

(b) Es gilt $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$. Entwickeln Sie $\cos^2 x$ in eine Fourier–Reihe und zeigen Sie mit der Parseval–Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^4 x \,\mathrm{d}x = \frac{3\pi}{4}.$$

(c) Entwickeln Sie $\cos^3 x = \left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3$ in eine Fourier–Reihe und zeigen Sie mit der Parseval–Gleichung

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^6 x \,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{8}.$$

[1]... Schweinebacke, eine Spezialität aus Idar-Oberstein.