PRÄSENZÜBUNGEN 4: Durchs wilde Ku$\mathbb{R}^3$distan

Für die Gruppenübungen am 14.–17. November 2017

1 Back to the ~~roots~~ residues! Ein Wiedersehen mit Cauchy:

(a) Sei $R \subset \mathbb{C}$ ein Rechteck. Welche Werte können folgende Kurvenintegrale annehmen?

$$\text{(i)} \oint_{\partial R} \frac{\sin z}{z^4}\,\mathrm{d}z, \quad \text{(ii)} \oint_{\partial R} \frac{1-\cos z}{z^5}\,\mathrm{d}z, \quad \text{(iii)} \oint_{\partial R} \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}\,\mathrm{d}z, \quad \text{(iv)} \oint_{\partial R} (z+2)\,\mathrm{e}^{1/z}\,\mathrm{d}z$$

Auf dem Rand ∂R sollen dabei keine Singularitäten des Integranden liegen.

(b) Berechnen Sie $\displaystyle\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_{\partial B(0,r)} \frac{(z+a)^n}{z^{k+1}}\,\mathrm{d}z$ für alle $n,k \in \mathbb{N}_{\geq 0}$ sowie $a \in \mathbb{R}$ und $r \in \mathbb{R}_{>0}$.

2 Mit Integralsätzen immer fest im Sattel.

(a) Skizzieren Sie den Körper $V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1+xy \,\}$.

(b) Die Randfläche ∂V setzt sich aus drei Teilen zusammen: Parametrisieren Sie die Bodenfläche B (mit $z=0$), die Mantelfläche M (mit $x^2+y^2=1$) und die Deckfläche D (mit $z = 1+xy$).

(c) Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(D)$ der Deckfläche D.

(d) Wir betrachten das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : (x,y,z) \mapsto (0,0,z^2)$. Berechnen Sie das Flussintegral $\int_D f \bullet \mathrm{d}D$ von f durch D nach außen. *Hinweis:* Es gilt $2\cos(\varphi)\sin(\varphi) = \sin(2\varphi)$.

(e) Bestimmen Sie $\int_B f \bullet \mathrm{d}B$ und $\int_M f \bullet \mathrm{d}M$ sowie $\int_V z\,\mathrm{d}V$ mit möglichst wenig Rechnung.

3 Mein unsichtbarer Freund Stokes.

(a) Skizzieren Sie die Fläche $S = \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 4x^2+y^2 \leq 4, \\ z = 4-4x^2-y^2 \end{matrix} \right\}$.

(b) Welche der folgenden Abbildungen und Definitionsbereiche parametrisieren S?

$$\Phi_1\begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r\cos t\\ r\sin t\\ 4-r^2 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_2\begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t\\ 2r\sin t\\ 4-4r^2 \end{pmatrix}, \qquad \Phi_3\begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos t\\ r\sin t\\ 4-4t^2 \end{pmatrix},$$

$$D_a = \left\{ \begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} t \in [0,2\pi], \\ r \in [0,1] \end{matrix} \right\}, \qquad D_b = \left\{ \begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} t \in [0,\pi], \\ r \in [0,2] \end{matrix} \right\},$$

$$D_c = \left\{ \begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} t \in [0,2\pi], \\ r \in [0,2] \end{matrix} \right\}, \qquad D_d = \left\{ \begin{pmatrix} t\\ r \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} t \in [0,2\pi], \\ r \in [1,2] \end{matrix} \right\}.$$

(c) Berechnen Sie für die Fläche S und ihre Randkurve $\Gamma = \partial S$ explizit die beiden Integrale

$$\int_S \mathrm{rot}\, f \bullet \mathrm{d}S \qquad \text{und} \qquad \int_\Gamma f \bullet \mathrm{d}\Gamma \qquad \text{für} \qquad f\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y-z\\ 2x+z\\ xy \end{pmatrix}.$$

Der Satz von Stokes zeigt Ihnen schließlich, ob Sie richtig gerechnet haben.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich meinen Kommentar als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Aufgabe 1: Sie haben bereits erste Erfahrungen mit Integralsätzen gemacht, und die Ergebnisse sind vielversprechend: Es ist nicht schwer und bietet viel. Cauchys Integralsatz verwandelt das komplexe Kurvenintegral $\oint_{\partial D} f(z)\,\mathrm{d}z$ in die Summe $2\pi\mathrm{i}\sum_{s\in\mathring{D}} \mathrm{res}_s(f)$. Links muss man integrieren, rechts nur Residuen summieren! Sie haben bereits einige erstaunliche Anwendungen hierzu gesehen. Diese Woche wiederholen Sie grundlegende Rechentechniken, damit diese parat bleiben.

In der Ebene $\mathbb{R}^2$ ist alles relativ übersichtlich. Im Raum $\mathbb{R}^3$ hingegen ist mehr Platz... Wir bewegen uns zwar täglich im Raum, insbesondere unser Sehsinn ist darauf optimiert, doch selbst einfache Formen (Objekte, Konstruktionen, Bauanleitungen) sind nicht einfach zu fassen und in Koordinaten zu beschreiben. Die Aufgaben (2–5) sind für Sie ein weiterer Schritt zum sicheren Umgang.

Aufgabe 2: Die Übersetzung zwischen Bild und Formel, Anschauung und Rechnung, ist zentral für alle technischen Anwendungen. Sie brauchen beides. Hierzu dient die Geometrie Ihrer HM1: *Geraden*, *Ebenen* und *Quadriken* wie $z = 1 + xy$. Wenn Sie den Körper V verstehen und zeichnen können (2a), dann können Sie auch V und seine Randfläche ∂V parametrisieren (2b). Umgekehrt erleichtert eine geschickte Parametrisierung (2b) die Skizze (2a), etwa in Polarkoordinaten. Die Berechnungen (2c–e) sind dann Routine: Sie setzen die Daten aus (2a–b) in das jeweilige Integral ein und rechnen es sorgsam aus, wie Sie es gelernt haben. Das wollen Sie möglichst effizient erledigen, genau hierzu erklärt Ihnen die HM3 die passenden Sätze. In (2e) helfen Ihnen geometrisches Verständnis und Ihre Integralsätze: Sie dürfen ausführlich rechnen, aber es gelingt auch ohne.

Aufgabe 3: Dasselbe Vorgehen: die Fläche S verstehen und skizzieren (3a), parametrisieren (3b) und dann zur Rechnung nutzen (3c). Wir nennen in (3b) einige Möglichkeiten; planloses Raten misslingt. Sie sollen die typischen Fehler erkennen und vermeiden, damit Sie sicher ans Ziel kommen. Zum guten Schluss können Sie Ihre Ergebnisse dank Stokes selbst überprüfen!

Aufgabe 4: Dasselbe Vorgehen: den Körper V verstehen und skizzieren (4a), seine Seitenflächen parametrisieren (4b) und dann zur Rechnung nutzen (4c); wie so oft können Sie durch Nachdenken Rechenaufwand sparen. Volumenintegrale (4d) kennen Sie schon länger, auch das sollen Sie hier nochmal üben. Zum guten Schluss können Sie Ihre Ergebnisse dank Gauß selbst überprüfen!

Aufgabe 5: Die Integralsätze können Sie zur Überprüfung einsetzen (3&4), oder auch umgekehrt, um sich manche Rechnungen ganz zu ersparen (2&5): Dieses Vorgehen sollen Sie hier üben. Mit Integralsätzen können Sie manchmal eine schwierige Rechnung gegen eine leichte eintauschen. Gute IngenieurInnen kennen die möglichen Methoden und entscheiden umsichtig und informiert.

Aufgabe 6: Ein Potential F zu f erfüllt $F' = \operatorname{grad} F = f$, ist also eine mehrdimensionale Stammfunktion! Zur Berechnung nutzen wir Arbeitsintegrale, hier speziell Hakenintegrale (6a). Damit können wir auch entlang geschlossener Wege integrieren (6b). Ab Dimension $n \geq 2$ wird das Potentialproblem spannend, denn wir stehen vor *zwei* Hindernissen: Erstens die lokale Integrabilitätsbedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$; wenn sie nicht erfüllt ist, dann gibt es sicher kein Potential (Satz von Schwarz); wenn sie erfüllt ist, dann gibt es *vielleicht* ein Potential, immerhin können Sie sofort Green/Stokes anwenden (6c). Zweitens die globale Form des Gebietes U: Wenn U einfach zusammenhängend ist, dann genügt Rotationsfreiheit (dank Green/Stokes), andernfalls genügt sie eventuell nicht (siehe 6b,c). Um ein Potential zu konstruieren, müssen wir genauer hinschauen, sorgfältig arbeiten (6d), und notfalls das Gebiet einschränken. *Lesen Sie weiter auf Seite 4.*

HAUSÜBUNGEN 4: Setzen Sie Ihre 3D-Brille auf!

Abzugeben in den Gruppenübungen am 21.–24. November 2017

4 Mein unsichtbarer Freund Gauß.

(a) Skizzieren Sie das Kompaktum V berandet durch die Flächen $x = 1$ und $x = -1$ sowie $z = 2 - 2y^2$ und $z = 0$.

(b) Parametrisieren Sie die vier Seitenflächen S_1, S_2, S_3, S_4 von V und geben Sie in jedem regulären Randpunkt $s \in S = \partial V$ den nach außen zeigenden Einheitsnormalenvektor an.

(c) Berechnen Sie durch jede Seitenfläche auswärts das Flussintegral des Vektorfeldes

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x(y+z) \\ -2yz \\ z(x+y+z) \end{pmatrix}.$$

(d) Berechnen Sie explizit das Integral $\int_V \operatorname{div} f \, \mathrm{d}V$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Flussintegralen aus Teil (c): Der Satz von Gauß zeigt Ihnen, ob Sie richtig gerechnet haben.

5 Stokes und Gauß, zwei wie Pech und Schwefel. Berechnen Sie jeweils das Integral $\int_S F \bullet \mathrm{d}S$:

(a) $F = \operatorname{rot}(\,2y,\ z-2x,\ yz\,)$ und $S = S_a := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\ z \ge 0\ \}$, orientiert durch die nach oben gerichtete Normale.

(b) $F = \operatorname{rot}(\,2y,\ z-2x,\ yz\,)$ und $S = S_b := \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 \le 1,\ z = 0\ \}$, orientiert durch die nach oben gerichtete Normale.

(c) $F = \operatorname{rot}(\,2y,\ z-2x,\ yz\,)$ und $S = S_a \cup S_b$, orientiert durch die nach außen gerichtete Normale.

(d) $F = (\,x^2y - 3x,\ -xy^2 + 2\cos(y)z,\ \sin(y)z^2\,)$ und $S = S_a \cup S_b$ wie in (c).

6 Quadrupolis: best Potential-Aufgabe ever! in se whole universe!

Sei $U = \mathbb{R}^2 \setminus \left\{ \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\}$ und $f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \dfrac{1}{(x^2-1)^2 + (y^2-1)^2} \begin{pmatrix} +2x(y^2-1) \\ -2y(x^2-1) \end{pmatrix}$.

(a) Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Der gerade Weg α von $(0,y)$ nach (x,y), wobei $y \neq \pm 1$, ergibt das Wegintegral $\int_\alpha f \bullet \mathrm{d}s = \arctan\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right) + \arctan\left(\frac{1}{y^2-1}\right)$. Berechnen Sie explizit das ähnliche Wegintegral $\int_\beta f \bullet \mathrm{d}s$ für den geraden Weg β von $(x,0)$ nach (x,y), wobei $x \neq \pm 1$.

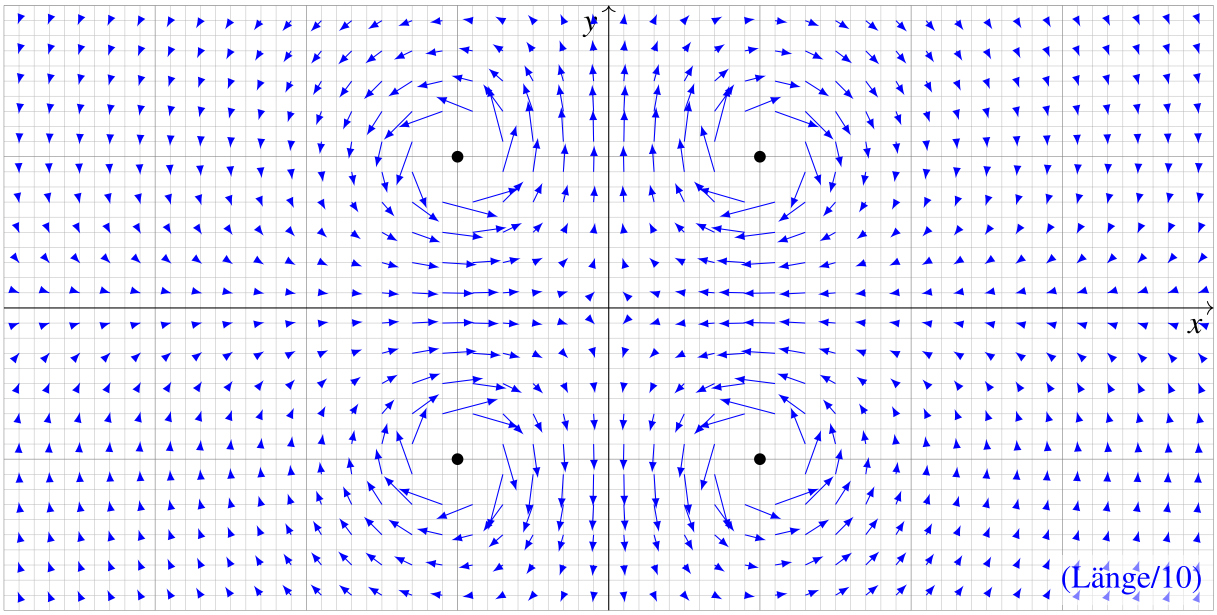
(b) Sei Q das Quadrat mit den Ecken $(0,0)$, $(2,0)$, $(2,2)$ und $(0,2)$. Berechnen Sie $\int_{\partial Q} f \bullet \mathrm{d}s$.

(c) Berechnen Sie die Jacobi–Matrix $\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}$. Ist f divergenzfrei? Ist f rotationsfrei? Folgern Sie das Wegintegral $\int_{\partial B((1,1),r)} f \bullet \mathrm{d}s$ für $0 < r < 2$ (mit möglichst wenig Rechenaufwand).

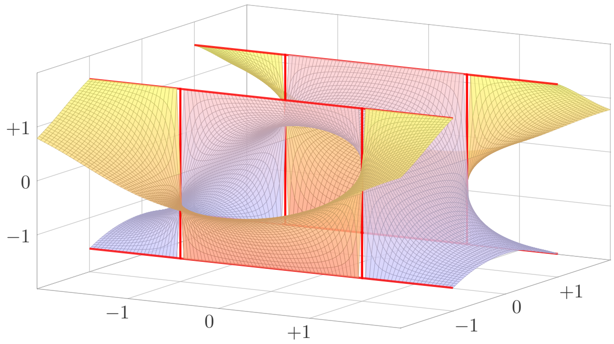
(d) Besitzt f ein Potential auf U? und auf $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \pm 1,\ |y| \ge 1\ \}$? Falls möglich berechnen Sie das Potential als Arbeitsintegral von $(0,0)$ nach (x,y) mit den Wegen aus (a). Nutzen Sie folgende Identität, um schließlich alle arctan–Terme zusammenzufassen:

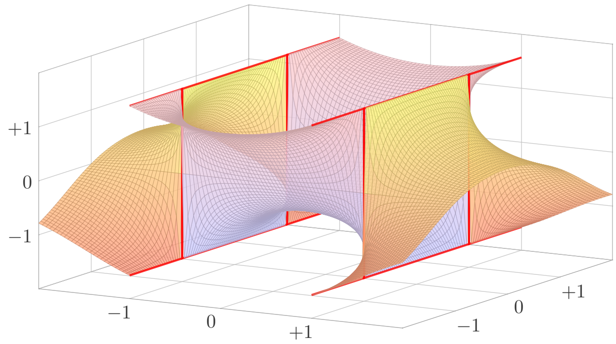
$$\arctan(1/x) = \begin{cases} +\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x > 0, \\ -\pi/2 - \arctan x & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Bonusmaterial in 3D: Die Lösung dieser Aufgabe sollen Sie erst *berechnen* und dann *bewundern*. Zur Unterstützung und Ermutigung skizzieren wir zunächst das bezaubernd hübsche Vektorfeld:

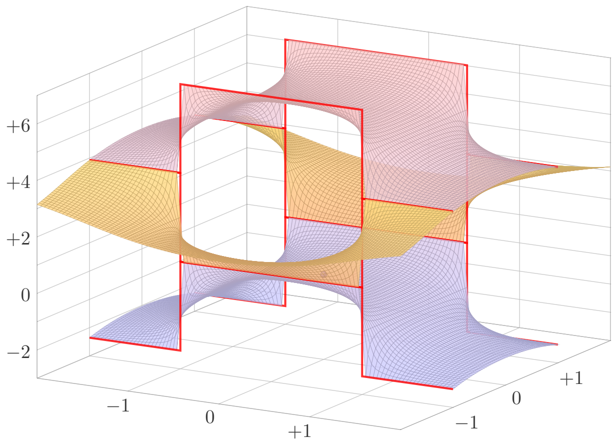


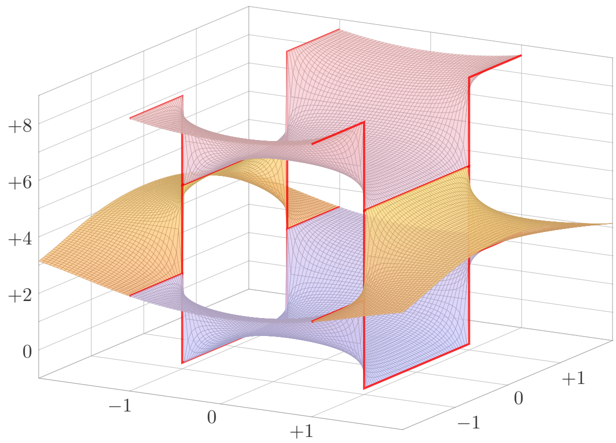
Die nächsten beiden Graphiken zeigen die Funktionen $\arctan\left(\frac{x^2-1}{y^2-1}\right)$ und $-\arctan\left(\frac{y^2-1}{x^2-1}\right)$. Die roten Linien markieren Definitionslücken: Die Funktion können hier nicht stetig fortgesetzt werden!





Die letzten Graphiken zeigen eine hieraus zusammengesetzte Fläche; die Verschiebungen entstehen durch geeignete additive Konstanten. Hierdurch können wir die Flächenstücke glatt zu einem Gesamtkunstwerk verkleben. Diese Potentialfläche über $U = \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{(\pm 1, \pm 1)\}$ ist aber keine Funktion! Die gesuchte Potentialfunktion ist nur ein Teil dieser Fläche: Sehen Sie welcher Teil?





Das Ergebnis ist sensationell, erhellend und schön anzuschauen. Sie dürfen stolz darauf sein.