PRÄSENZÜBUNGEN 3: Holomorphie, yippie!

Für die Gruppenübungen am 7.–10. November 2017

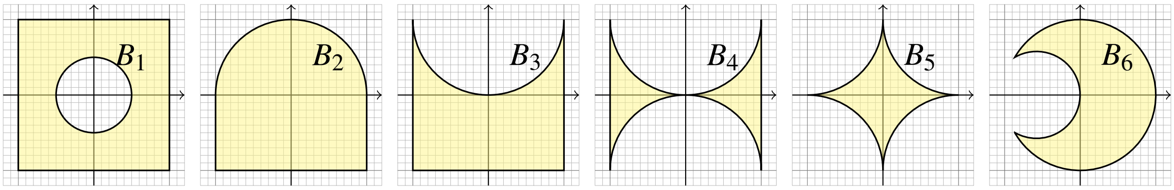
1 Ja? Nein? Warum? Beantworten Sie folgende Fragen; begründen Sie (durch ein Ergebnis aus Ihrer Vorlesung) oder widerlegen Sie die Aussage (durch ein Gegenbeispiel aus Ihrem Fundus).

(a) Gilt $\int_1^2 1/x^2 \,\mathrm{d}x = [-1/x]_1^2 = 1/2$? und ebenso $\int_{-1}^2 1/x^2 \,\mathrm{d}x = [-1/x]_{-1}^2 = -3/2$?

(b) Ist $f = p/q : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine rationale Funktion, so auch $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$? und $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$?

(c) Ist jede stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ absolut integrierbar? und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$? und $f :]a,b] \to \mathbb{R}$?

(d) Ist die Menge $B_i \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich in x-Richtung? und in y-Richtung?



(e) Gibt es stetige Funktionen $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ mit

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \neq \quad \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y?$$

und stetige Funktionen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$?

(f) Unter welchen Voraussetzungen gilt $\int_Y f(y)\,\mathrm{d}y = \int_X f(\Phi(x)) \cdot |\det \Phi'(x)|\,\mathrm{d}x$?

(g) Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktionenfolge mit $|f_n(x)| \le 2/(1+|x|)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Gilt $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$? und für $|f_n(x)| \le 1/(1+x^2)$?

(h) Sei $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Gilt dann $\partial_x \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \partial_x f(x,y)\,\mathrm{d}y$?
Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig diff'bar. Gilt dann $\partial_x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d \partial_x f(x,y)\,\mathrm{d}y$?

2 Dem Ingeniör ist nichts zu schwör. Auch singulär fällt ihr nicht schwär.

(a) Bestimmen Sie die Residuen in allen Singularitäten von $h_1(z) = \frac{z^2}{z^4-16}$ und $h_2(z) = \frac{z}{(z^2-2z+5)^2}$.
Folgern Sie hieraus (ohne weitere Rechnung) die komplexe Partialbruchzerlegung von h_1.

(b) Sei $D_1 = [-1,3] \times [-3,1]$ und $D_2 = B(2+\mathrm{i},3)$. Bestimmen Sie $\int_{\partial D_i} h_j(z)\,\mathrm{d}z$ für $i,j = 1,2$.

(c) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-16}\,\mathrm{d}x$ und $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(x^2-2x+5)^2}\,\mathrm{d}x$. Sind die Integranden absolut integrierbar?

3 Test the best: Holomorphie testen mit Cauchy–Riemann.
Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} : x+\mathrm{i}y \mapsto f(x+\mathrm{i}y) = \mathrm{e}^x(x\cos y - y\sin y) + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^x(x\sin y + y\cos y)$.

(a) Bestimmen Sie die Funktionen $u,v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ so, dass $f(x+iy) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ ist.

(b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$, also die Jacobi–Matrix $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

(c) Sind die Cauchy–Riemann–Gleichungen erfüllt? Ist die Funktion f holomorph?

(d) Schreiben Sie die Funktion f als elementare Funktion in der komplexen Variable $z = x+iy$ und bestimmen Sie die Wirtinger–Ableitungen $\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y)f$ und $\partial_{\bar z} f = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)f$.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich meinen Kommentar als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Aufgabe 1: In den ersten Wochen der HM3 haben Sie bereits gemerkt: Die Techniken sind klar und präzise, aber Sie müssen sie einüben, typische Probleme lösen und dabei Ihre Fragen klären.

Hierzu dient auch diese Wiederholung. Sie kennen inzwischen einige Integrationstechniken und wollen / sollen / müssen diese sicher und korrekt anwenden: Hauptsatz der Differential- und Integralgrechnung (a), elementare Integrale (b), absolute Integrierbarkeit (c), Normalbereiche (d), Fubini (e), Transformationssatz (f), Grenzwerte (g) und Ableitungen (h) unter dem Integral. Sie brauchen die zugrundeliegende Theorie *und* die Beispiele: Sätze erklären Ihnen die Techniken, Beispiele illustrieren mögliche Anwendungen und Gegenbeispiele warnen vor typischen Fehlanwendungen.

Bei diesem Frageformat „Ja? Nein? Warum?“ müssen Sie alle relevanten Sätze und Beispiele parat haben. Dies hat sich auch in Klausuren bewährt: Es belohnt diejenigen mit leicht und schnell verdienten Punkten, die die Vorlesung und die Übungen ernsthaft bearbeiten.

Aufgabe 4: An diesem Beispiel wiederholen und vergleichen Sie verschiedene Techniken: Die Wahl des für Sie günstigsten Rechenweges erfordert neben Kenntnis der Möglichkeiten auch Erfahrung. Anders als in 1d sollen Sie in 4a sorgfältig die Integrationsgrenzen bestimmen. Alternativ formulieren Sie in 4b den Flächeninhalt mit den Greenschen Flächenformeln. Es gibt noch weitere Möglichkeiten! In 4c sollen Sie eine auswählen, möglichst geschickt, es ist dann nicht schwer. In 4d können Sie Ihre Erfahrungen gleich nutzen für an ähnliches Integral: den Schwerpunkt.

Aufgabe 2: Komplexe Zahlen $z = x + \mathrm{i}y$ und komplexe Funktionen wie $\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$ sind Ihnen spätestens seit dem Beginn der HM1/2 vertraut. Ebenso übertragen wir Differenzierbarkeit und Ableitung $f'(z) = \lim_{w\to 0} \frac{f(z+w)-f(z)}{w}$ vom Reellen ins Komplexe und erleben einige schöne Überraschungen. Der Höhepunkt sind Cauchys Residuensatz und seine Anwendungen: Für komplexe (und reelle) Integrale eröffnen sie uns wunderbar effiziente Rechentechniken. Auf dem Weg durch die *komplexe Ebene* gewinnen wir *reelle Integrale*! Dies zahlt sich überall aus: Partialbrüche, Fourier– und Laplace–Transformation, usw. Viele dieser Integrale sind mit reellen Methoden nur schwer zu berechnen, doch mit dem Residuensatz für komplexe Funktionen gelingen sie leicht. Aufgabe 5 zeigt eine solche Anwendung. Jacques Hadamard (1865–1963) sagte treffend: „Der kürzeste und beste Weg zwischen zwei reellen Wahrheiten führt oft durchs Imaginäre.“

Aufgabe 5: Der Residuensatz gilt zunächst nur für *kompakte* Bereiche $D \subset \mathbb{C}$, wie immer natürlich mit stückweise glattem Rand, so wie Sie dies von den ebenen Integralsätzen (Green, Gauß, Cauchy) gewohnt sind. Wie gehen Sie vor, wenn Ihr Integrationsbereich nicht kompakt ist, so wie hier? Ganz einfach: Sie berechnen zunächst den endlichen Fall für $r \in \mathbb{R}_{>0}$. (5a) Hier gilt der Residuensatz! Dann untersuchen Sie den Grenzübergang $r \to \infty$. Das kennen Sie aus der HM2 von *uneigentlichen Integralen*, nichts anderes passiert hier. Manche „Störterme“ fallen dabei glücklicherweise weg, das muss man natürlich nachprüfen (5c). Es bleibt am Ende das gesuchte Integral (5d). Alles wird gut!

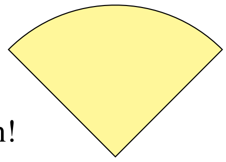
Aufgabe 3&6: Um den Residuensatz anwenden zu können, müssen wir zunächst klären, ob unsere Funktion $f : \mathbb{C} \supset \Omega \to \mathbb{C}$ tatsächlich holomorph ist, also komplex differenzierbar (mit stetiger Ableitung f'). Hierzu dienen die Cauchy–Riemann–Gleichungen $\partial_x u = \partial_y v$ und $\partial_x v = -\partial_y u$ oder zusammengefasst $\partial_{\bar z} f = 0$. Damit können Sie bequem und effizient prüfen, ob f holomorph ist oder nicht. Die Wirtinger–Ableitungen ∂_z und $\partial_{\bar z}$ sind ein praktisches Werkzeug: Es gelten die üblichen Rechenregeln wie Sie sie kennen und lieben, statt reell nun auch komplex. Das wirkt.

HAUSÜBUNGEN 3: Holomorphie, jetzt oder nie!

Abzugeben in den Gruppenübungen am 14.–17. November 2017

4 Schwarzwälder Kirschtorte: La cerise sur le gâteau. Wir betrachten den Kreissektor

$$A = \left\{ (x,y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le r \le 1 \text{ und } \tfrac{1}{4}\pi \le \varphi \le \tfrac{3}{4}\pi \right\}.$$



(a) Ist dieser Kreissektor $A \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich in x-Richtung? In y-Richtung? Wenn nein, warum nicht? Wenn ja, geben Sie explizit die jeweiligen Grenzen an!

(b) Parametrisieren Sie den Rand ∂A und schreiben Sie explizit ein Randintegral zur Berechnung des Flächeninhalts $\mathrm{vol}_2(A) = \int_{\partial A} \dots \mathrm{d}s$. (Sie müssen es hier noch nicht ausrechnen.)

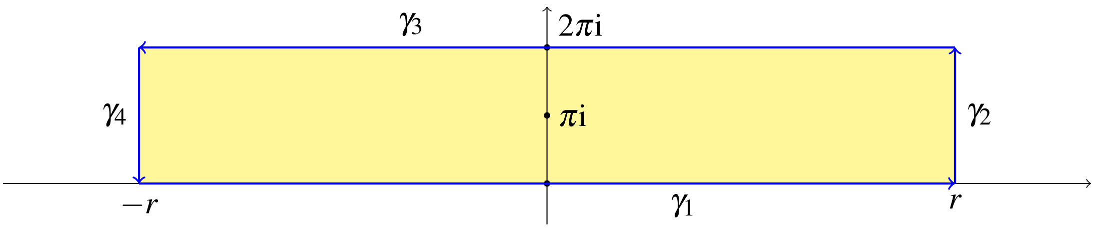
(c) Was ist der Flächeninhalt von A? Mit welchem Integral berechnen Sie das am geschicktesten?

(d) Berechnen Sie den Schwerpunkt $(\bar{x}, \bar{y})$ von A. Warum ist $\bar{x} = 0$?

5 Cauchys Residuensatz: Gehen Sie bis an Ihre Grenzen! Gesucht ist das reelle Integral

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{ax}}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x \quad \text{für } a \in \mathbb{R} \text{ mit } 0 < a < 1.$$

Für $r \in \mathbb{R}_{>0}$ sei dazu R das Rechteck mit den Eckpunkten $-r$, r, $r+2\pi\mathrm{i}$ und $-r+2\pi\mathrm{i}$:



(a) Bestimmen Sie alle Singularitäten der holomorphen Funktion $f(z) = \frac{\mathrm{e}^{az}}{1+\mathrm{e}^{z}}$. Welche davon liegen innerhalb unseres Rechtecks R? Bestimmen Sie das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$.

(b) Geben Sie explizit Wege γ_1, γ_2, γ_3, γ_4 an, die die vier Seiten des Rechtecks R parametrisieren.

(c) Zeigen Sie durch geeignete Abschätzung, dass $\int_{\gamma_2} f(z)\,\mathrm{d}z$ und $\int_{\gamma_4} f(z)\,\mathrm{d}z$ für $r \to +\infty$ gegen 0 konvergieren. Wogegen konvergiert demnach $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z$ für $r \to +\infty$?

(d) Führen Sie $\int_{\gamma_1} f(z)\,\mathrm{d}z = c_1 I_r$ und $\int_{\gamma_3} f(z)\,\mathrm{d}z = c_3 I_r$ auf das Integral $I_r = \int_{-r}^{r} f(x)\,\mathrm{d}x$ zurück. Was sind hier die Konstanten c_1 und c_3? Folgern Sie schließlich $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi/\sin(a\pi)$.

6 Test the best: Holomorphie testen mit Wirtinger.

(a) Berechnen Sie die Wirtinger–Ableitungen ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ der folgenden Funktionen:

$$z, \qquad \bar{z}, \qquad z^2\bar{z}^3, \qquad \frac{1}{|z|^2}, \qquad \mathrm{Re}(z), \qquad \mathrm{e}^{\bar{z}}.$$

Hinweis: Für ∂_x, ∂_y und somit auch für $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\partial_y), \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$ gelten die üblichen Rechenregeln: Linearität, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, etc. Konvergente Potenzreihen können, wie Sie aus der HM2 wissen, termweise abgeleitet werden. Das hilft!

(b) Sei $z = x + \mathrm{i}y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, also $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$. Es seien $f, g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \cos(x)\cosh(y) - \mathrm{i}\sin(x)\sinh(y) \quad \text{und} \quad g(z) = \cosh(x)\sin(y) - \mathrm{i}\sinh(x)\cos(y).$$

Berechnen Sie die Wirtinger–Ableitungen ∂_z und $\partial_{\bar{z}}$ von f und g. An welchen Stellen $z = x + \mathrm{i}y$ gilt $\partial_{\bar{z}} f(z) = 0$ bzw. $\partial_{\bar{z}} g(z) = 0$? Ist f bzw. g holomorph?