PRÄSENZÜBUNGEN 2: Aufbruch in höhere Dimensionen

Für die Gruppenübungen am 24.–27. Oktober 2017

1 Null Komma Null Komma Null. Verwenden Sie die fünf Grundregeln für die Messbarkeit von Teilmengen $A \subset \mathbb{R}^n$ zur Lösung folgender Aufgaben. Welche der Grundregeln haben Sie verwendet?

(a) Berechnen Sie das Volumen $\operatorname{vol}_1(\{a\})$ für eine reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{vol}_1(\{a_0, \dots, a_n\})$ für endlich viele reelle Zahlen $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$.

(c) Die Menge $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen ist abzählbar (Lineare Algebra, §1.4.2), das heißt: Es gibt eine Folge $(q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\mathbb{Q} = \{\, q_i \in \mathbb{R} \mid i \in \mathbb{N} \,\}$. Was ist demnach $\operatorname{vol}_1(\mathbb{Q})$?

(d) Finden Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass für jedes nicht-leere Intervall $I = \,]a,b[\, \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$f|_I \neq 0 \quad \text{aber dennoch} \quad \int_I f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

(e) Können Sie f wie in (d) wählen, sodass f zudem stetig ist?

2 In jeder Hinsicht normal.

(a) Zeichnen Sie das Dreieck $D = [(0,0),(2,2),(0,1)]$.

(b) Ist D ein Normalbereich in x-Richtung? Wenn ja, mit welchen Grenzen?

(c) Ist D ein Normalbereich in y-Richtung? Wenn ja, mit welchen Grenzen?

(d) Bestimmen Sie $\int_{(x,y)\in D} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ für $f(x,y) = (x+y)^2$.
Welche der beiden Integrationsreihenfolgen ist hier geschickter?
Wenn Sie möchten, können Sie beide ausprobieren und vergleichen!

3 Was nützt dem Polarbären sein Zylinderhut?

(a) Folgende spiralförmige Fläche F ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$F = \left\{\, (\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi)) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \varphi \in [0,2\pi],\, \rho \in [0,\sqrt{\varphi}] \,\right\}.$$

Skizzieren Sie die Fläche F und berechnen Sie ihren Flächeninhalt $\operatorname{vol}_2(F)$.

(b) Skizzieren Sie den folgenden Körper V und berechnen Sie sein Volumen $\operatorname{vol}_3(V)$:

$$V = \left\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2+y^2+z^2 \le 4,\ 1 \le z \le 3/2,\ x \ge 0,\ x \ge y \,\right\}.$$

Welche Koordinaten scheinen Ihnen geschickt? Nutzen Sie dann den Transformationssatz!

Die Hausübungen Blatt 2 — für die nächsten beiden Wochen! — finden Sie auf der Webseite.

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend für Sie zu wissen, wozu Ihre Übungsaufgaben gut sind, was Sie hier lernen können und wie der größere Zusammenhang aussieht. Dazu schreibe ich hier wöchentlich meinen Kommentar als Erläuterung, Orientierung und Ermutigung.

Aufgabe 1: Eine Menge $N \subset \mathbb{R}^n$ vom Volumen Null, also $\mathrm{vol}_n(N) = 0$, ist bei der Integration vernachlässigbar; wir nennen N kurzerhand eine *Nullmenge* (A401). In dieser Aufgabe lernen Sie einige einfache Nullmengen kennen und nutzen. Diese Vereinfachung ist für Ihre Rechnungen oft nützlich, zum Beispiel bei Sprungstellen. Stetige Funktionen haben wir in der Vorlesung diskutiert!

Aufgabe 2: Der Satz von Fubini verwandelt ein mehrdimensionales Integral in mehrere eindimensionale, und solche Probleme können Sie dank Ihrer HM2 bereits gut lösen. Die Anwendung auf Normalbereiche ist besonders häufig. Dazu müssen Sie sorgfältig die Integrationsgrenzen bestimmen; hierzu dient dieses erste Beispiel. Eine ähnliche Aufgabe finden Sie auf Folie C311.

Aufgabe 3: Der Transformationssatz entspricht der eindimensionalen Substitution und ermöglicht Ihnen, geschickte Koordinaten zu wählen. Typisch sind Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten. Je nach Anwendung helfen Ihnen auch maßgeschneiderte Varianten.

Aufgabe 4: Manche Integrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ können wir nicht durch eine explizite Stammfunktion F lösen. Zu jeder stetigen Funktion f existiert zwar immer eine stetige differenzierbare Funktion F mit $F' = f$ wie ersehnt — dem Hauptsatz sei Dank! — aber nicht immer lässt sich F durch elementare Funktionen ausdrücken. Aus der Vorlesung kennen Sie ein Doppelintegral, wo die eine Integrationsreihenfolge fehlschlägt, aber die andere glücklicherweise gelingt (C133). So etwas passiert öfter! Das ist die Magie guter Methoden (Sätze) und wirksamer Tricks (Übung).

Aufgabe 5: Für die mehrdimensionale Integration ist der Satz von Fubini allgegenwärtig. Er hat, wie Sie aus der Vorlesung wissen, eine wesentliche Voraussetzung: die absolute Integrierbarkeit! Diese Aufgabe zeigt Ihnen eine harmlos anmutende *rationale* Funktion, die zu überraschenden Ergebnissen (und Erkenntnissen) führt. Aus der Vorlesung kennen Sie ein ähnliches Beispiel (C413).

Aufgabe 6: Die Abbildung $\Phi : A \to B$ beschreibt einen Koordinatenwechsel: Sie ordnet jedem Punkt $a \in A$ genau einen Bildpunkt $b = \Phi(a) \in B$ zu. Bijektivität bedeutet: Zu jedem $b \in B$ existiert genau ein Urbild $a \in A$. Wir haben für Sie die Umkehrfunktion $\Phi^{-1} : B \to A$ explizit ausgeschrieben: Wie Sie leicht nachrechnen können, gilt tatsächlich $\Phi^{-1} \circ \Phi = \mathrm{id}_A$ und $\Phi \circ \Phi^{-1} = \mathrm{id}_B$.

Aufgabe 6&7: Die Umparametrisierung erlaubt Ihnen, im Integral zu geschickten Koordinaten zu wechseln: Sie passen Ihre Koordinaten der Problemstellung an und vereinfachen so Ihre Rechnung! Hier hilft nur Erfahrung; die erwerben Sie, wie immer im Leben, nur durch viel Übung.

Aufgabe 8: In Rechnungen möchten Sie oft Integral und Grenzwert vertauschen — ohne dabei das Ergebnis zu ändern! Aus der Vorlesung kennen Sie zwei wichtige Fälle, in denen dies möglich ist: monotone Konvergenz (Ausschöpfung) und majorisierte Konvergenz (unter einer integrierbaren Hüllfunktion). Diese schöne Aufgabe illustriert alle Fälle, die auftreten können. Sie wirkt auf den ersten Blick vielleicht abschreckend, stellt sich dann aber als sehr einfach und lehrreich heraus.

Aufgabe 9: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung hat höherdimensionale Entsprechungen: Die Integralsätze von Green, Gauß und Stokes. Diese werden in den Ingenieur- und Naturwissenschaften als Allzweckwerkzeug überall eingesetzt, zum Beispiel zur Strömungslehre, Elektrodynamik, Wärmeleitung, etc. Ihre Vorlesung HM3 erklärt Ihnen hierzu, wie diese Werkzeuge funktionieren, und präsentiert Übungen und erste Anwendungen. Diese Aufgabe ist ein Anfang.

HAUSÜBUNGEN 2: Aufbruch in höhere Dimensionen

Abzugeben in den Gruppenübungen am 7.–10. November 2017

In der Woche vom 31. Oktober bis 3. November fallen die Übungen wegen der Feiertage aus. Deshalb gibt es diesmal ein doppeltes Hausübungsblatt, davon werden zwei Aufgaben korrigiert.

4 Der große Houdini. Bestimmen Sie $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{\sqrt{x}} \frac{e^y}{y}\,dy\,dx$.

(a) Skizzieren Sie den Integrationsbereich in der x–y–Ebene.

(b) Existiert zu $t \mapsto e^t/t$ eine Stammfunktion? Ist sie elementar?

(c) Wie können Sie die vorliegende Aufgabe dennoch elementar lösen?

5 Der große Fubini. Wir untersuchen die rationale Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} \quad \text{für } (x,y) \neq (0,0) \text{ und } f(0,0) = 0.$$

(a) Berechnen und vergleichen Sie die Integrale $\int_{x=0}^{2}\int_{y=0}^{1} f(x,y)\,dy\,dx$ und $\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{2} f(x,y)\,dx\,dy$.

(b) Der Polstelle kann man sich verschieden nähern: Skizzieren Sie $t \mapsto f(t,2t)$ sowie $t \mapsto f(2t,t)$ und berechnen Sie $\lim_{t\to 0} f(t,2t)$ sowie $\lim_{t\to 0} f(2t,t)$.

(c) Bestimmen Sie Positivteil $f^+ = \max\{f,0\}$ und Negativteil $f^- = \max\{-f,0\}$. Wie in der Vorlesung erklärt, gilt allgemein die Zerlegung $f = f^+ - f^-$ und $|f| = f^+ + f^-$.

(d) Bestimmen Sie die Integrale $\int_R f^+(x,y)\,d(x,y)$ und $\int_R f^-(x,y)\,d(x,y)$ sowie $\int_R |f(x,y)|\,d(x,y)$ über dem Rechteck $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$. Warum und wie können Sie *hier* den Satz von Fubini anwenden?

6 Transformers 1: Age of the Exponential. Gegeben ist der ebene Bereich

$$B = \{\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \ge 0,\ y \le 0,\ y+1 \le x \le y+2\ \}$$

und hierzu die lineare Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \Phi^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie den Bereich B und sein Urbild $A = \Phi^{-1}(B)$.

(b) Berechnen Sie die beiden Funktionaldeterminanten.

(c) Berechnen Sie das Integral $\int_B e^{\frac{x+y}{x-y}}\,d(x,y)$.

7 Transformers 2: Revenge of the Ellipsoid. Gegeben sei der Körper

$$E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} \le 1,\ x \le 0,\ z \ge 0 \right\}.$$

Wir passen die Kugelkoordinaten entsprechend an und erhalten die Transformation

$$\Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\rho \sin\theta \cos\varphi \\ 3\rho \sin\theta \sin\varphi \\ 2\rho \cos\theta \end{pmatrix}.$$

(a) Skizzieren Sie E und berechnen Sie die Funktionaldeterminante von Φ.

(b) Berechnen Sie das Volumen von E und das Trägheitsmoment bezüglich der z–Achse.

8 Erschöpfende Monotonie. Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $n = 1,2,3,\dots$ sei $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto n^a \cdot \mathbf{I}_{[-n,n]}(x)$.

(a) Gegen welche Funktion $g : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$ konvergiert die Funktionenfolge g_n punktweise?

(b) Skizzieren Sie für $a = -1/2$ und $a = 1$ die Funktionen g_n und soweit möglich ihre Hüllfunktion $h : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}} : x \mapsto h(x) := \sup\{\, |g_n(x)| \mid n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\} \,\}$.

(c) Sind alle g_n messbar ? sogar integierbar? Für welche $a \in \mathbb{R}$ konvergiert g_n monoton gegen g? Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert eine integrierbare Majorante für die Familie $(g_n)_{n\ge1}$.

(d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ vertauschen Integral und Grenzwert:

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{?}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n(x)\,\mathrm{d}x$$

Für welche $a \in \mathbb{R}$ kann man mit Hilfe von Teil (c) das Ergebnis schon voraussagen?

9 Green integriert rot. Gauß fließt raus.

(a) Zeichnen Sie den kompakten Bereich $D \subset \mathbb{R}^2$ zwischen den Kurven $y = x^2$ und $y = x$.

Gegeben ist hierauf das Vektorfeld $V(x,y) = (xy, x)$. Überprüfen Sie die Gültigkeit des Greenschen Satzes: Berechnen Sie sowohl das Flächenintegral $\int_{(x,y)\in D} \operatorname{rot} V(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ als auch das Arbeitsintegral $\int_{s\in\partial D} V(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang des Randes.

(b) Es sei $R \subset \mathbb{R}^2$ das Rechteck zwischen den Geraden $x = 1$, $y = 2$, $x = 3$ und $y = 3$. Bestimmen Sie folgendes Wegintegral entlang des Randes ∂R:

$$\int_{(x,y)\in\partial R} \left(\frac{2y + \sin x}{1 + x^2} \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{x + e^y}{1 + y^2} \right) \mathrm{d}y$$