HAUSÜBUNGEN 1: Is' integral, is' nich' egal!

Abzugeben in den Gruppenübungen am 24.–27. Oktober 2017

1 Die Ableitung fällt nicht weit von der Stammfunktion. Bestimmen Sie folgende Stammfunktionen (mit geeigneten Integrationstechniken) und überprüfen Sie Ihre Ergebnisse durch Ableiten.

(a) $\displaystyle\int x\,\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int \ln(x)\,\mathrm{d}x.$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{(3x+2)^2}\,\mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int \frac{x-4}{(x+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$ und $\displaystyle\int \frac{1}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

Umgekehrte Problemstellung: Prüfen Sie, ob die folgenden Stammfunktionen korrekt sind.

(d) $\displaystyle\int \tan(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan^2(x)$ und $\displaystyle\int \tan(x)\sec^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sec^2(x)$

Hier ist $\sec(x) := 1/\cos(x)$ die Sekans-Funktion. Gilt $\tan^2(x) = \sec^2(x)$?

2 Ein weites Feld mit viel Potential. Wir untersuchen die Vektorfelder $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f(x,y,z) = (x^2y\,,\, z^3\,,\, y^2 - z^2\,),$$
$$g(x,y,z) = \big(\mathrm{e}^{x+y^2}\cos(z)^3\,,\, 2\,\mathrm{e}^{x+y^2}y\cos(z)^3\,,\, -3\,\mathrm{e}^{x+y^2}\sin(z)\cos(z)^2 + 1\big).$$

(a) Welche dieser Vektorfelder besitzen ein Potential? Geben Sie ein Potential an oder begründen Sie, warum kein Potential existieren kann. (Oder beides, wenn Sie sicher gehen wollen. ;-)

(b) Skizzieren Sie die Schraubenlinie $\gamma : [0, 9\pi/2] \to \mathbb{R}^3 : t \mapsto (t, \cos(t), \sin(t))$. Berechnen Sie die Wegintegrale $\int_\gamma f \cdot \mathrm{d}\gamma$ und $\int_\gamma g \cdot \mathrm{d}\gamma$ der Vektorfelder f und g längs des Weges γ.

3 Darf ich's Ihnen einschachteln? Gegeben ist eine Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, die auf $[-1,0]$ wächst und auf $[0,1]$ fällt (nicht unbedingt streng monoton). Zudem kennen wir einige Funktionswerte bis auf 10^{-1} genau: $f(0) \in [0.3, 0.4]$, $f(\pm 0.5) \in [0.2, 0.3]$, $f(\pm 0.8) \in [0.05, 0.15]$, $f(\pm 1) = 0$.

(a) Skizzieren Sie den Bereich, in dem sich die Funktion f befinden muss, genauer: Zeichnen Sie die minimale bzw. maximale (Treppen-)Funktion $f_{\min}$ (blau) bzw. $f_{\max}$ (grün) mit den oben genannten Eigenschaften; markieren Sie sorgfältig die Funktionswerte an den Sprungstellen.

(b) Berechnen Sie die Integrale $\int_{-1}^{1} f_{\min}(x)\,\mathrm{d}x$ und $\int_{-1}^{1} f_{\max}(x)\,\mathrm{d}x$. Welche Rolle für das Integral spielen die Funktionswerte an den Sprungstellen? Wie groß ist $\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x$ für unsere Funktion f mit den angegebenen Daten mindestens? höchstens? Warum sind diese Grenzen optimal?

(c) Die Funktion $f_1 : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 0.4 \cdot (1 - x^2)$ erfüllt die Bedingungen; tragen Sie f_1 in Ihre Skizze ein. Berechnen Sie das Integral $\int_{-1}^{1} f_1(x)\,\mathrm{d}x$ exakt und vergleichen Sie mit (b).

(d) Die Funktion $f_2 : [-1,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \left\{\begin{array}{ll} \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} & \text{für } |x| < 1, \\ 0 & \text{für } |x| = 1, \end{array}\right\}$ erfüllt ebenfalls alle genannten Bedingungen; tragen Sie auch f_2 in Ihre Skizze ein. Finden Sie einen Näherungswert für $\int_{-1}^{1} f_2(x)\,\mathrm{d}x$ mit Computerhilfe und vergleichen Sie mit (b).

IHR TRAINING BEIM HM-DREISPRUNG: VORLESUNG — ÜBUNG — KLAUSUR

Ihr HM3-Team stellt Ihnen jede Woche gut abgestimmte Aufgaben, damit Sie die Techniken der Höheren Mathematik einüben und vertiefen. Unser gemeinsames Ziel ist, dass Sie diese klausurfest beherrschen. Laut Modulbeschreibung: selbstständig, sicher, kritisch, korrekt und kreativ.

Auf Wunsch der Studierenden führen wir hierzu das Übungssystem der HM1/2 fort: Sie beginnen mit den Präsenzübungen in den Gruppenübungen; diese sind eher leicht zur Wiederholung der Begriffe und zur Einübung neuer Methoden. Zudem bereiten sie auf die anschließenden Hausübungen vor; diese sind etwa mittelschwer, manchmal knifflig, und erfordern konzentrierte eigene Arbeit. Die Hausübungen arbeiten Sie schriftlich aus und reichen sie zur Korrektur ein.

Aus diesem Aufgabenrepertoire aus Vorlesung und (Präsenz- / Haus- / Vortrags-) Übung leiten sich typische Klausuraufgaben ab und werden den Klausurbedingungen entsprechend angepasst.

Vorlesung, Übung, Klausur sind eng aufeinander abgestimmt: Die Vorlesung erklärt Ihnen die Begriffe und Techniken, in der Übung trainieren Sie ihre korrekte und sichere Anwendung, in der Klausur stellen Sie schließlich Ihr Können unter Beweis. Die Übungen haben die zentrale Scharnierfunktion, Ihr kontinuierliches persönliches Engagement ist der Schlüssel zu Ihrem Erfolg!

MOTIVATION ZU DEN AUFGABEN

Wenn Sie wissen wollen, *was* sich Ihr HM3–Team zu den Aufgaben gedacht hat, dann sind Sie hier richtig. Erfahrungsgemäß ist es hilfreich und motivierend zu wissen, was hier eigentlich passiert, und wie der größere Zusammenhang aussieht. Deshalb plaudere ich ein wenig aus dem Nähkästchen.

Aufgabe 1: Aus der HM2 kennen Sie einerseits das Integral als Fläche unter dem Funktionsgraphen, andererseits Stammfunktionen als Umkehrung zur Ableitung, und schließlich den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (HDI), der beide verbindet. Das ist überall, auch in der HM3, das Arbeitspferd der Integration. Hieraus folgen die gängigen Integrationstechniken: partielle Integration, Substitution, Partialbruchzerlegung, usw. Die müssen Sie üben, damit Ihnen solche Rechnungen routiniert, flüssig und fehlerfrei von der Hand gehen. Wer eigenes Training scheut, dem ist nicht zu helfen (siehe oben); bitte verfolgen Sie ernsthaft Ihre Lern- und Übungsstrategie.

Aufgabe 2: Aus dem Finale der HM2 kennen Sie Vektorfelder, Wegintegrale und Potentiale: Ein Potential F zu f erfüllt $F' = \operatorname{grad} F = f$, ist also eine mehrdimensionale Stammfunktion! Diese Techniken werden in den Natur- und Ingenieurwissenschaften nahezu überall verwendet, in der HM3 werden wir sie ausbauen zu Integralsätzen (Kapitel E–H) und nutzen für exakte Differentialgleichungen (Kapitel M). Hierzu benötigen Sie Sicherheit in Theorie und Rechnung. Wie immer empfiehlt sich die abschließende Probe: *Berechnen ist schwer, prüfen ist leicht!*

Aufgabe 3: Anschaulich ist das Integral $f \mapsto \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ die Fläche unter dem Funktionsgraphen. Diese Zuordnung ist linear und monoton und erfüllt $\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c \cdot (b-a)$. Schon mit diesen drei Grundregeln können Sie Treppenfunktionen integrieren und weitere Funktionen einschachteln. Das nützt theoretisch (beim Grenzübergang zu exakten Werten) und numerisch (für explizite Ungleichungen, Näherungen und Fehlerschranken). Dieser Zugang funktioniert auch mehrdimensional ganz wunderbar. Diese Aufgabe führt Sie exemplarisch durch eine einfache Rechnung und klärt ein paar Feinheiten, die immer wieder auftreten; besser Sie klären diese Grundlagen jetzt, ein für alle Mal. Zu f_1 finden Sie eine explizite Stammfunktion, so können Sie das Integral exakt berechnen, dank HDI. Auch zu f_2 existiert eine Stammfunktion, dank HDI, aber sie lässt sich nicht elementar als geschlossene Formel hinschreiben. Hier bleibt uns tatsächlich *nur* die numerische Integration!