Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/13	/14	/10	/10	/72

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Existenz 1: Zu lösen sei $y'(x) = a(x) + b(x)\,y(x)^2$ mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
Existiert für alle a, b und zu jedem Startwert $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

/ 2

2B. Existenz 2: Zu lösen sei $y'(x) = a(x) + b(x)\,y(x)$ mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
Existiert für alle a, b und zu jedem Startwert $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

/ 2

2C. Kreuzungen 1: Die Gleichung $y'(x) = 3\sqrt[3]{y(x)^2}$ wird gelöst durch $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v(x) = 0$.
Gibt es eine überkreuzende Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

/ 2

2D. Kreuzungen 2: Die Gleichung $y'(x) = \sin(y(x))$ wird gelöst durch $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v(x) = 0$. Gibt es eine überkreuzende Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

$\overline{}$
2

2E. Diagonalisierung 1: Ist jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $\det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 1$ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

$\overline{}$
2

2F. Diagonalisierung 2: Ist jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit $\det(A - \lambda E) = \lambda^4$ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

$\overline{}$
2

Aufgabe 3. *Exakte und separierbare Differentialgleichungen (4+4+4 = 12 Punkte)*

Zu lösen ist für $y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto y(x)$ die Differentialgleichung

$$\underbrace{+\,y\sin(x)}_{f(x,y)}\ \underbrace{-\,3\cos(x)}_{g(x,y)}\ y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = \pi.$$

3A. Berechnen Sie zunächst die Rotation:

$\operatorname{rot}(f, g) =$

1

Finden Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(y)$, der nur von y abhängt:

3

3B. Bestimmen Sie ein Potential $\Phi(x, y)$ zum skalierten Vektorfeld $(\,\lambda(y)f(x, y),\ \lambda(y)g(x, y)\,)$:

$\Phi(x, y) =$

2

Lösen Sie damit die Differentialgleichung mit dem Startwert $y(0) = \pi$:

$y(x) =$

2

3C. Lösen Sie durch Trennung der Variablen $y \sin(x) - 5\cos(x)\, y' = 0$ mit $y(0) = \pi$.

4

Hinweis: Um sicher zu sein, dass die von Ihnen gefundene Lösung tatsächlich korrekt ist, dürfen Sie jeweils die Probe machen. Das ist einfach, schnell und sicher.

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen (2+2+4+2+3 = 13 Punkte)*

4A. Zu lösen ist die Differentialgleichung $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$p(x) =$

2

4B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$

Folgern Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$

2

4C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = \mathrm{e}^t$.

$y(t) =$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = t\,\mathrm{e}^t$.

Ansatz $y(t) =$

Lösung $y(t) =$

4

4D. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t}$.

$y(t) =$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cos(t)$.

$y(t) =$

2

4E. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = t\,\mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t}$.

Ansatz $y(t) =$

Lösung $y(t) =$

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (*2+2+4+2+2+2 = 14 Punkte*)

Zu lösen ist $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & 4 \\ 6 & -6 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$ zum Eigenwert $\lambda_1 =$

2

5B. Bestimmen Sie damit einen zweiten, linear unabhängigen Eigenvektor:

Eigenvektor $v_2 =$ zum Eigenwert $\lambda_2 =$

2

5C. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe.

Bestimmen Sie zunächst den doppelten Eigenwert $\lambda_3 = \lambda_4 =$

sowie die Matrix $A - \lambda_4 =$:

Hauptvektor $v_4 =$,

Eigenvektor $v_3 =$ [ ]. Schreiben Sie v_3 explizit als Spaltenvektor!

/ 4

5D. Folgern Sie die Determinante $\det A =$ [ ]

und schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix bezüglich der obigen Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

${}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} =$ [ ]

/ 2

5E. Bestimmen Sie die Lösung $y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_4'(t) = A\,y_4(t)$ und $y_4(0) = v_4$.

$y_4(t) =$ [ ]

Bestimmen Sie die Lösung $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_3'(t) = A\,y_3(t)$ und $y_3(0) = v_3$.

$y_3(t) =$ [ ]

/ 2

5F. Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y'(t) = A\,y(t)$ und $y(0) = u_1$. (Kein Tippfehler!)

$y(t) =$ [ ]

/ 2

Schreiben Sie diese reelle Lösung explizit als Spaltenvektor.

Aufgabe 6. *PDE und Separationsmethode (3+3+2+2 = 10 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times [0, \pi] \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$\partial_t^2 u(t,x) = -\partial_x^2 u(t,x)$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$u(0,x) = 0$	Startwerte für $t = 0$ und alle $0 < x < \pi$,
$\partial_t u(0,x) = h(x)$	Startwerte für $t = 0$ und alle $0 < x < \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, \pi\}$ und alle $t \ge 0$.

Suchen Sie zunächst Lösungen in Produktform $u(t,x) = v(t) \cdot w(x)$.

6A. Stellen Sie durch Separation die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(x)$ auf:

Bestimmen Sie alle periodischen Lösungen $w(x)$ dieser Gleichung (ohne Randbedingungen):

$w(x) =$

Bestimmen Sie hierzu alle Lösungen w_n $(n \in \mathbb{N})$ mit Randbedingungen $w_n(0) = w_n(\pi) = 0$:

$w_n(x) =$

$\overline{}$
3

6B. Stellen Sie die an $w(x)$ gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichung für $v(t)$ auf:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $v(t)$ dieser Gleichung (noch ohne Startbedingungen):

$v(t) =$

Bestimmen Sie zu w_n die Lösung v_n $(n \in \mathbb{N})$ mit Startbedingungen $v_n(0) = 0$ und $v_n'(0) = 1$:

$v_n(t) =$

3

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(t) w_n(x) \quad \text{mit} \quad u(0,x) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x).$$

6C. Bestimmen Sie speziell die Lösung zu den Startwerten $u(0,x) = 0$ und $\partial_t u(0,x) = \sin(3x)$.

$u(t,x) =$

2

6D. Bestimmen Sie entsprechend die Lösung zu $\partial_t u(0,x) = x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n} \sin(nx)$.

$u(t,x) =$

2

Aufgabe 7. *PDE und Charakteristikmethode (3+4+3 = 10 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ die partielle Differentialgleichung

$\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = -2u(t,x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$,

$u(0,x) = \sin(x)$ Startwerte für $t = 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

7A. Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem an:

$t'(s) = 1,$ $t(0) = 0,$

$x'(s) =$ ☐, $x(0) = x_0,$

$z'(s) =$ ☐, $z(0) =$ ☐.

3

7B. Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik; für diese gilt $u(t(s), x(s)) = z(s)$:

$t(s) = s,$ $x(s) =$ ☐, $z(s) =$ ☐.

Vorgegeben sei nun ein Punkt $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}$. Zu welchen Startwerten (t_0, x_0, z_0) läuft die Charakteristik über (t_1, x_1), das heißt $(t(s), x(s)) = (t_1, x_1)$ für ein $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$?

$t_0 = 0,$ $x_0 =$ ☐, $z_0 =$ ☐.

4

7C. Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$u(t,x) =$ ☐

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) =$ ☐

$3\partial_x u(t,x) =$ ☐

3