Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/1	/12	/10	/10	/16	/23	/72

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Vorgelegt seien integrierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots : \mathbb{R} \to [-5, 5]$. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ eine Nullfolge. Kann dennoch $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = n \to \infty$ gelten?

Begründete Antwort:

$\overline{2}$

2B. Vorgelegt seien integrierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3, \dots : [0, 3] \to [-5, 5]$. In jedem Punkt $x \in [0, 3]$ sei $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ eine Nullfolge. Folgt daraus $\int_0^3 f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ für $n \to \infty$?

Begründete Antwort:

$\overline{2}$

2C. Seien $p(x, y)$ und $q(x, y)$ reelle Polynome in x, y mit $q(x, y) \neq 0$ für alle $(x, y) \in \,]0, 1[^2$. Folgt daraus die Gleichheit $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{p(x,y)}{q(x,y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{p(x,y)}{q(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$?

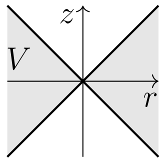
Begründete Antwort:

$\overline{2}$

2D. Vorgelegt sei eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $\int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x = 0$.
Folgt daraus $f(x) = 0$ für alle $x \in [0,1]$ bis auf endlich viele Ausnahmen?

Begründete Antwort:

2



2E. Die Menge $V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \ge z^2 \,\}$ ist das Komplement des offenen Doppelkegels $\{\, x^2 + y^2 < z^2 \,\}$. Ist V einfach zusammenhängend?

Begründete Antwort:

2

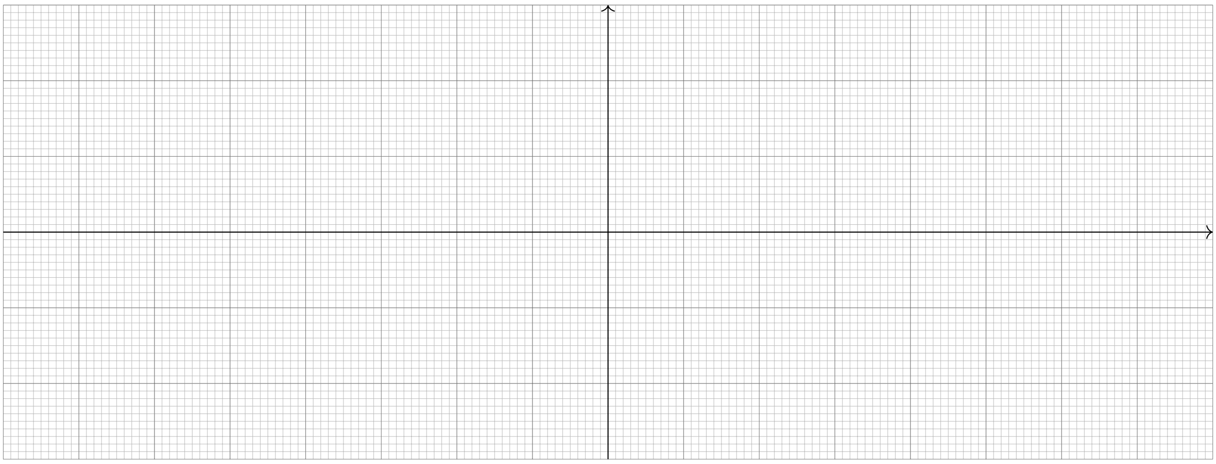
2F. Die Menge $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > z^2 \,\}$ ist das Komplement des abgeschlossenen Doppelkegels. Erlaubt jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \supset U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

2

Aufgabe 3. *Integralsätze in der Ebene (2+4+2+2 = 10 Punkte)*

3A. Skizzieren Sie das Bild des Weges $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \,:\, t \mapsto \gamma(t) = |t| \cdot (\cos t, \sin t)$:



2

Die umschlossene Fläche $H = \left\{ \rho \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) \;\middle|\; -\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le |\varphi| \right\}$ hat Inhalt ≈ 10.

3B. Berechnen Sie zum Vektorfeld $f(x, y) = (-y, x)$ das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang γ.
Hinweis: Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ im Punkt $t \ne 0$ erfüllt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|t| = \operatorname{sign}(t) \in \{\pm 1\}$.

$$\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s =$$

4

3C. Berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Weg γ umschlossenen Fläche $H \subset \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{vol}_2(H) = \int_H 1 \,\mathrm{d}(x, y)\,\mathrm{d}x =$$

2

3D. Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes $g(x, y) = (x^2 + 4y, 10x + \mathrm{e}^y)$ längs γ:

$$\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s =$$

2

Aufgabe 4. *Der Residuensatz (2+4+2+2 = 10 Punkte)*

4A. Bestimmen Sie für $u \in \mathbb{C}$ die Residuen der holomorphen Funktion $f(z) = e^{iuz}/(z^2 - 9)$:

$$\operatorname*{res}_{z=+3}\left(\frac{e^{iuz}}{z^2-9}\right) = \boxed{} \quad , \quad \operatorname*{res}_{z=-3}\left(\frac{e^{iuz}}{z^2-9}\right) = \boxed{}$$

/2

4B. Berechnen Sie für $u \geq 0$ das folgende reelle Integral (wie in der Vorlesung erklärt). Vereinfachen Sie das Ergebnis zu einer elementaren reellen Funktion.

$$\widehat{f}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2 - 9}\, dx =$$

/4

4C. Nennen Sie zur holomorphen Funktion $g(z) = z^3\, e^{1/z}$ die ersten sechs Terme der (Laurent–) Potenzreihe um $z = 0$ und folgern Sie daraus das Residuum:

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left[z^3\, e^{1/z}\right] = \operatorname*{res}_{z=0}\left[\boxed{}\right] = \boxed{}$$

/2

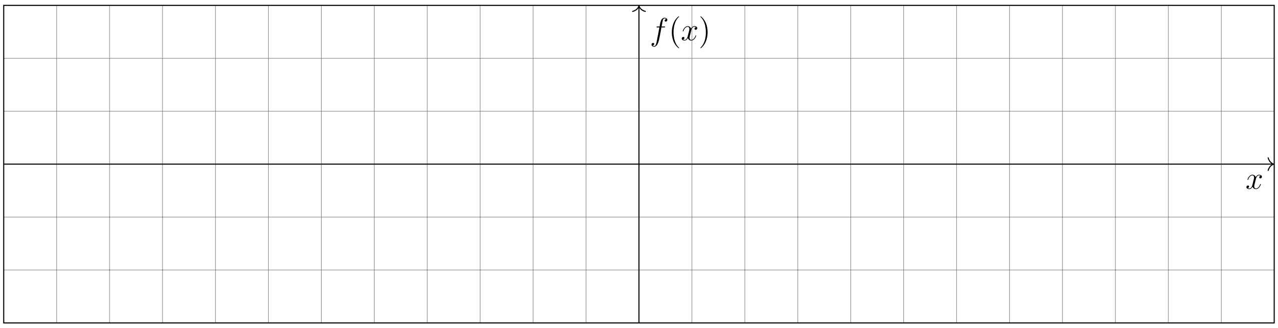
4D. Bestimmen Sie das folgende komplexe Integral:

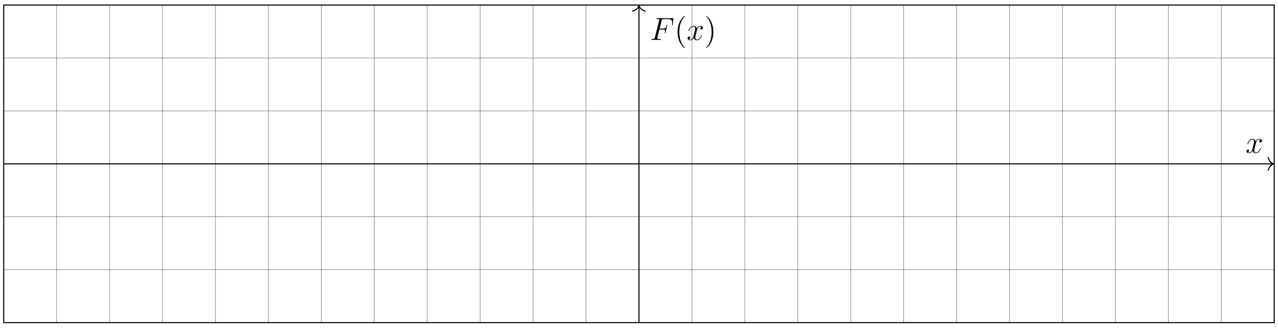
$$\int_{t=0}^{2\pi} e^{3it} \exp\left(e^{-it}\right) \cdot i\, e^{it}\, dt = \boxed{}$$

/2

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen* (*2+2+4+2+3+3 = 16 Punkte*)

5A. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch und ungerade mit $f(x) = 1$ für $0 < x < \pi/2$ und $f(x) = 0$ für $\pi/2 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie f und F mit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[-12, 12]$:





2

5B. Finden Sie die Grenzwerte der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f in $x \in \{0, \pi/2\}$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(0) =$ ☐ , $\lim_{n\to\infty} f_n(\pi/2) =$ ☐

2

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

4

5D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von f an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \pm \dots \quad \in [0.75, 0.83]$.

2

5E. Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$

$A_k =$

$B_k =$

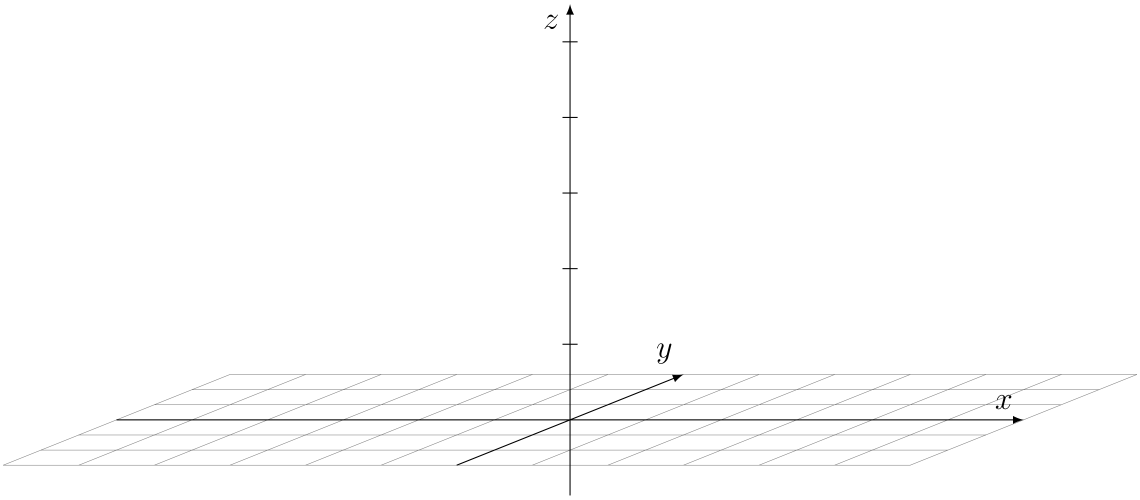
3

5F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von F an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(4j+2)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{22^2} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{30^2} + \dots \in [0.30, 0.34]$.

3

Aufgabe 6. *Körper und Flächen, Gauß und Stokes (1+3+3+3+3+2+4+4 = 23 Punkte)*

6A. Skizzieren Sie den Körper $K = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3 - x\ \}$:



1

Seine Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B (mit $z = 0$), dem Mantel M (mit $x^2 + y^2 = 4$) und dem Deckel D (mit $z = 3 - x$). Wir orientieren alle drei wie üblich von K nach außen.

6B. Parametrisieren Sie den Mantel M in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \rho = \boxed{\quad} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \boxed{\quad} \end{cases}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix}.$$

3

6C. Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(M)$ der Mantelfläche mit der Parametrisierung Φ:

$\mathrm{vol}_2(M) =$

3

6D. Parametrisieren Sie den Deckel D in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \boxed{} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}.$$

— 3

6E. Berechnen Sie mit Ψ das Flussintegral von $f(x,y,z) = (0,0,z)$ durch D nach außen:

$$\int_D f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

— 3

6F. Berechnen Sie hieraus das Volumen von K mit dem Satz von Gauß:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$

— 2

Wir betrachten das Vektorfeld $g:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-y^2/2} - \mathrm{e}^{-2} \\ x\,\mathrm{e}^{z} \\ -\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

6G. Berechnen Sie das Flussintegral von $\operatorname{rot}(g)$ durch die Fläche $M \cup D$ nach außen:

$$\int_M \operatorname{rot} g(s) \bullet \mathrm{d}S + \int_D \operatorname{rot} g(s) \bullet \mathrm{d}S$$

4

6H. Berechnen Sie das Flussintegral von g durch die Bodenfläche B nach außen:

$$\int_B g(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

4