Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/1	/12	/10	/10	/16	/23	/72

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Diese Scheinklausur ist eine Zwischenbilanz nach wenigen Wochen, eine erste Rückmeldung und Diagnose: Was können Sie schon? Was fehlt noch? Es geht um die Beherrschung der Begriffe und Techniken. Alle Rechnungen, insbesondere Integrale, sind ganz bewusst noch einfach gehalten. In der späteren Abschlussklausur (Modulprüfung) sind die Rechnungen meist anspruchsvoller.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Vorgelegt seien integrierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots : \mathbb{R} \to [-5, 5]$. In jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ sei $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ eine Nullfolge. Kann dennoch $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = n \to \infty$ gelten?

Begründete Antwort:

Ja. Ein konkretes Beispiel sind die Treppenfunktionen $f_n = \frac{1}{n} \mathbf{I}_{[0,n^2]} : \mathbb{R} \to [0, 1]$.

Erläuterung: Punktweise Konvergenz $f_n(x) \to f(x)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ garantiert noch nicht die Konvergenz $\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x$ der Integrale. Gegenbeispiele wie die obigen kennen Sie aus Vorlesung und Übung. Für $f_n : [0, 3] \to \mathbb{R}$ gelingt dies ebenso mit $f_n = n^2\, \mathbf{I}_{]0,1/n[}$.

Für $f_n : [0, 3] \to [-5, 5]$ hingegen gibt es keine solchen Gegenbeispiele. Sie kennen den Grund: Existiert zur Folge $f_n \to f$ zudem eine integrierbare Majorante h, also $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$, dann garantiert der Satz von der majorisierten Konvergenz $\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

2

2B. Vorgelegt seien integrierbare Funktionen $f_1, f_2, f_3, \ldots : [0, 3] \to [-5, 5]$. In jedem Punkt $x \in [0, 3]$ sei $f_n(x) \to 0$ für $n \to \infty$ eine Nullfolge. Folgt daraus $\int_0^3 f_n(x)\,\mathrm{d}x \to 0$ für $n \to \infty$?

Begründete Antwort:

Ja. Der Satz von der majorisierten Konvergenz ist hier anwendbar.

Erläuterung: Hier hat der Integrationsbereich $\Omega = [0, 3]$ endliches Volumen, $\mathrm{vol}_1(\Omega) = 3$, und alle Funktionen sind durch $h = 5$ majorisiert, denn nach Voraussetzung gilt $|f_n| \le 5$. Wegen $\int_\Omega h(x)\,\mathrm{d}x = 15 < \infty$ hat diese Majorante ein endliches Integral.

Aus punktweiser Konvergenz $f_n \to f$ und einer integrierbaren Majorante, also $|f_n| \le h$ und $\int_\Omega h < \infty$, folgt die Konvergenz der Integrale $\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x$.

2

2C. Seien $p(x, y)$ und $q(x, y)$ reelle Polynome in x, y mit $q(x, y) \ne 0$ für alle $(x, y) \in\,]0, 1[^2$. Folgt daraus die Gleichheit $\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{p(x,y)}{q(x,y)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{p(x,y)}{q(x,y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$?

Begründete Antwort:

Nein. Wir kennen Gegenbeispiele aus der Vorlesung und aus der Übung.

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = +\frac{\pi}{4} \quad \ne \quad -\frac{\pi}{4} = \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$\int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \quad \ne \quad \int_{y=0}^1 \int_{x=0}^1 \frac{xy(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Erläuterung: Der Satz von Fubini erfordert absolute Integrierbarkeit! Diese ist hier nicht gegeben: Sowohl Positivteil als auch Negativteil liefern unendliche Integrale, und beide löschen sich tückisch aus, und zwar verschieden je nach Integrationsreihenfolge.

2

2D. Vorgelegt sei eine Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.
Folgt daraus $f(x)=0$ für alle $x\in[0,1]$ bis auf endlich viele Ausnahmen?

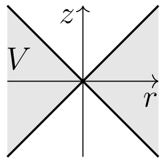
Begründete Antwort:

Nein. Als Gegenbeispiel kennen wir die Indikatorfunktion $\mathbf{I}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ aus der Übung.

Erläuterung: Für jede *stetige* Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ mit $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$ folgt $f(x)=0$ in jedem Punkt $x\in[0,1]$. Aber Stetigkeit wird hier nicht vorausgesetzt.

Für jede endliche Menge $\emptyset \neq A \subset [0,1]$ ist die Indikatorfunktion $f = \mathbf{I}_A : [0,1]\to\mathbb{R}$ ein Beispiel mit $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$, dennoch gilt $f\neq 0$. Dasselbe gilt dank Ausschöpfung für jede abzählbare Menge, etwa $A=\mathbb{Q}\cap[0,1]$ oder $A=\{1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$. Erstaunlich aber wahr: Es gilt $f(x)=1$ an unendlich vielen Stellen, aber dennoch $\int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = 0$.

2



2E. Die Menge $V = \{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \ge z^2 \,\}$ ist das Komplement des offenen Doppelkegels $\{\, x^2+y^2 < z^2 \,\}$. Ist V einfach zusammenhängend?

Begründete Antwort:

Ja. Die Menge V ist sogar sternförmig bezüglich des Nullpunkts $(0,0,0)$.

Erläuterung: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten lässt sich das Potentialproblem besonders gut lösen. Wichtige Spezialfälle sind konvexe Gebiete und sternförmige Gebiete.

Die Menge V ist offensichtlich nicht konvex, aber immerhin sternförmig: Für jeden Punkt $(x,y,z)\in V$ gilt $x^2+y^2\ge z^2$. Jeder Punkt $\lambda(x,y,z,)$ mit $\lambda\in[0,1]$ erfüllt dann ebenfalls diese Bedingung. So kann jeder Punkt $(x,y,z)\in V$ auf direktem Wege mit $(0,0,0)\in V$ verbunden werden, und der Weg verläuft ganz in V. Insbesondere ist V einfach zusammenhängend, das heißt: In V kann jeder geschlossene Weg zu einem Punkt zusammengezogen werden.

2

2F. Die Menge $U = \{\, (x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 > z^2 \,\}$ ist das Komplement des abgeschlossenen Doppelkegels. Erlaubt jedes rotationsfreie Vektorfeld $f:\mathbb{R}^3\supset U\to\mathbb{R}^3$ ein Potential $F:U\to\mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

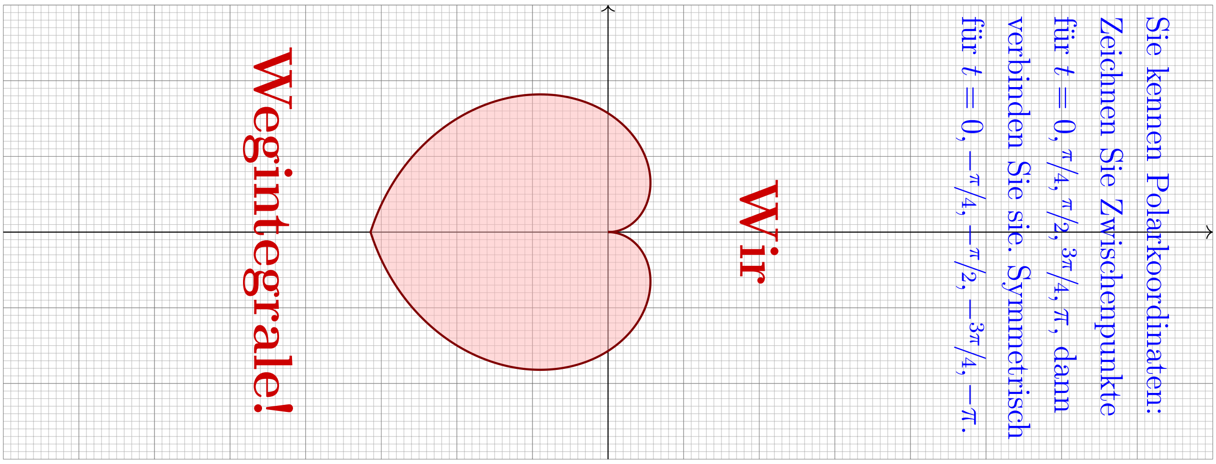
Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x,y,z) = (-y,x,0)/(x^2+y^2)$.

Erläuterung: Dieses prominente Vektorfeld wurde in Übung und Vorlesung behandelt; es ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der z–Achse. Auf ganz U gilt $\operatorname{rot}(f)=0$, aber dennoch gilt $\int_\gamma f(s)\bullet\mathrm{d}s \neq 0$ entlang $\gamma:[0,2\pi]\to U : t\mapsto(\cos t,\sin t,0)$. Demnach ist f zwar auf ganz U rotationsfrei, kann aber dennoch kein Potential auf U haben. Die Bedingung $\operatorname{rot}(f)=0$ ist notwendig für ein Potential, aber hinreichend erst für einfach zusammenhängende Gebiete. Das Gebiet U ist demnach nicht einfach zusammenhängend: $\operatorname{rot}(f)=0$ und $\int_\gamma f(s)\bullet\mathrm{d}s\neq 0$ beweisen, dass sich der Weg γ nicht zusammenziehen lässt!

2

Aufgabe 3. *Integralsätze in der Ebene (2+4+2+2 = 10 Punkte)*

3A. Skizzieren Sie das Bild des Weges $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2 \;:\; t \mapsto \gamma(t) = |t| \cdot (\cos t, \sin t)$:



2

Die umschlossene Fläche $H = \big\{\, \rho \cdot (\cos\varphi, \sin\varphi) \;\big|\; -\pi \le \varphi \le \pi,\ 0 \le \rho \le |\varphi| \,\big\}$ hat Inhalt ≈ 10.

3B. Berechnen Sie zum Vektorfeld $f(x,y) = (-y, x)$ das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ entlang γ.
Hinweis: Die Betragsfunktion $t \mapsto |t|$ im Punkt $t \neq 0$ erfüllt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|t| = \operatorname{sign}(t) \in \{\pm 1\}$.

$$\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_{t=-\pi}^{\pi} f(\gamma(t)) \bullet \gamma'(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{Definition des Arbeitsintegrals}$$

$$= \int_{t=-\pi}^{\pi} |t| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \bullet \left[\operatorname{sign}(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + |t| \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \right] \qquad \text{Einsetzen, Ableiten}$$

$$= \int_{t=-\pi}^{\pi} t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} \right]_{t=-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3} \approx 20.67 \qquad \text{Ausrechnen, Integrieren}$$

Erläuterung: Wer den Betrag nicht mag, kann das Integral zerlegen in $\int_{t=-\pi}^{\pi} = \int_{t=-\pi}^{0} + \int_{t=0}^{\pi}$.
Dieses Beispiel dient hier als Anwendung zum Satz von Green und der Flächenformel.
Die folgenden Fragen nutzen den Satz von Green in beide Richtungen. Den Flächeninhalt erhalten Sie alternativ auch in Polarkoordinaten mit dem Transformationssatz.

4

3C. Berechnen Sie den Flächeninhalt der vom Weg γ umschlossenen Fläche $H \subset \mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{vol}_2(H) = \int_H 1\,\mathrm{d}(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_H \operatorname{rot}(f)\,\mathrm{d}(x,y) = \frac{1}{2}\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s = \frac{\pi^3}{3} \approx 10.335$$

Erläuterung: Wir nutzen den Satz von Green, hier als Flächenformel dank 3B.

2

3D. Berechnen Sie das Arbeitsintegral des Vektorfeldes $g(x,y) = (x^2 + 4y, 10x + \mathrm{e}^y)$ längs γ:

$$\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s = \int_H \operatorname{rot}(g)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_H 6\,\mathrm{d}(x,y) = 6\operatorname{vol}_2(H) = 2\pi^3 \approx 62$$

Erläuterung: Wir nutzen den Satz von Green, hier als Flächenformel dank 3C.

2

Aufgabe 4. *Der Residuensatz (2+4+2+2 = 10 Punkte)*

4A. Bestimmen Sie für $u \in \mathbb{C}$ die Residuen der holomorphen Funktion $f(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}/(z^2-9)$:

$$\operatorname*{res}_{z=+3}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2-9}\right) = \boxed{\lim_{z\to+3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z+3} = +\frac{\mathrm{e}^{+3\mathrm{i}u}}{6}}\;,\qquad \operatorname*{res}_{z=-3}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2-9}\right) = \boxed{\lim_{z\to-3}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z-3} = -\frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}u}}{6}}$$

2

4B. Berechnen Sie für $u \ge 0$ das folgende reelle Integral (wie in der Vorlesung erklärt). Vereinfachen Sie das Ergebnis zu einer elementaren reellen Funktion.

$$\widehat{f}(u) := \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(ux)}{x^2-9}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2-9}\,\mathrm{d}z \quad \text{Komplex geht's leichter!}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}(s)>0}\operatorname*{res}_{z=s} f(z) + \pi\mathrm{i}\sum_{\operatorname{Im}(s)=0}\operatorname*{res}_{z=s} f(z) \quad \text{Wir nutzen den Residuensatz.}$$

$$= \pi\mathrm{i}\left(\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}u}}{6} - \frac{\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}u}}{6}\right) = -\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\mathrm{e}^{3\mathrm{i}u}-\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}u}}{2\mathrm{i}} \quad \text{Wir setzen die Residuen aus 4A ein.}$$

$$= -\frac{\pi}{3}\sin(3u) \quad \text{Wir vereinfachen: Das Ergebnis ist reell!}$$

Erläuterung: Mit dem Residuensatz können wir (auch reelle!) Integrale leicht berechnen. Dies nutzen wir insbesondere zur Fourier–Transformation, daher schreibe ich hier $\widehat{f}$. *Nicht richtig* ist es, den Integranden $\cos(ux)/(x^2-9)$ wie eine rationale Funktion zu behandeln und den Residuensatz naiv auf $h(z) = \cos(uz)/(z^2-9)$ anzuwenden, oder die ähnliche Rechnung für $\int_{-\infty}^{\infty}\cos(ux)/(x^4+1)\,\mathrm{d}x$ aus der Vorlesung hier abzuschreiben.

Hier liegen die Singularitäten $s = \pm 3$ auf der reellen Achse, also $\operatorname{Im}(s) = 0$: In Zeile 2 wird dazu der Residuensatz richtig zitiert und in Zeile 3 wird richtig eingesetzt. Üben Sie Sorgfalt!

4

4C. Nennen Sie zur holomorphen Funktion $g(z) = z^3\,\mathrm{e}^{1/z}$ die ersten sechs Terme der (Laurent–)Potenzreihe um $z = 0$ und folgern Sie daraus das Residuum:

In die Exponentialreihe einsetzen:

$$\operatorname*{res}_{z=0}\left[z^3\,\mathrm{e}^{1/z}\right] = \operatorname*{res}_{z=0}\left[\frac{z^3}{0!}+\frac{z^2}{1!}+\frac{z^1}{2!}+\frac{z^0}{3!}+\frac{z^{-1}}{4!}+\frac{z^{-2}}{5!}+\dots\right] = \boxed{\frac{1}{24}}$$

Voilà, schon steht's da!

2

4D. Bestimmen Sie das folgende komplexe Integral:

Definition des komplexen Wegintegrals

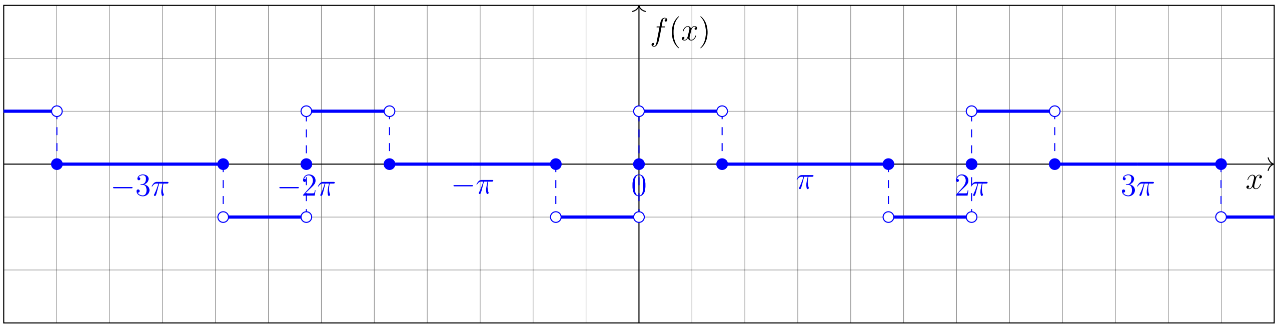
$$\int_{t=0}^{2\pi}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}t}\exp\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\,\mathrm{d}t = \int_{\partial B(0,1)} g(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\operatorname*{res}_{z=0} g(z) = \frac{2\pi\mathrm{i}}{24} = \frac{\pi\mathrm{i}}{12}$$

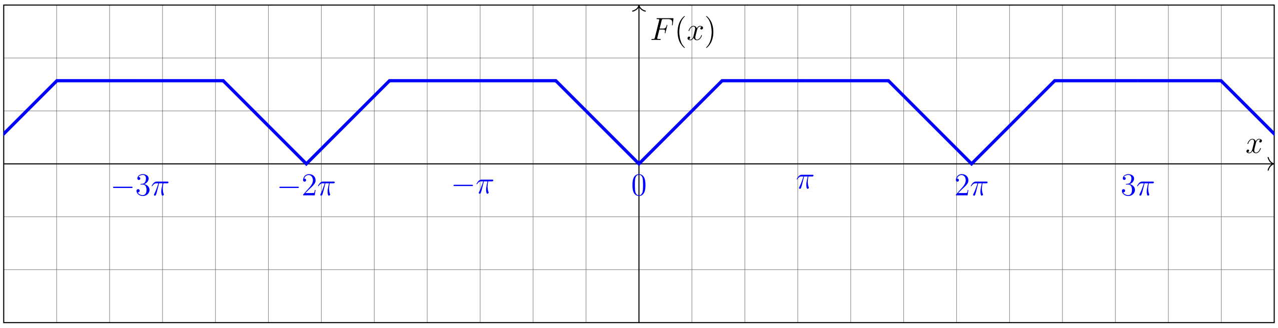
…und Residuensatz dank 4C. Fertig.

2

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen (2+2+4+2+3+3 = 16 Punkte)*

5A. Die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sei 2π–periodisch und ungerade mit $f(x)=1$ für $0<x<\pi/2$ und $f(x)=0$ für $\pi/2\le x\le\pi$. Skizzieren Sie f und F mit $F(x)=\int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ auf $[-12,12]$:





2

5B. Finden Sie die Grenzwerte der Fourier–Reihe $f_n(x)=\sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f in $x\in\{0,\pi/2\}$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \boxed{0}\,,\quad \lim_{n\to\infty} f_n(\pi/2) = \boxed{\tfrac{1}{2}}$$

2

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos(kx)+b_k\sin(kx)$:

$a_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0$	ungerader Integrand!
$b_k = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x$	gerader Integrand!
$= \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_{x=0}^{\pi/2} \sin(kx)\,\mathrm{d}x$	Funktion f einsetzen
$= \dfrac{2}{\pi}\Big[-\dfrac{\cos(kx)}{k}\Big]_{x=0}^{\pi/2}$	Stammfunktion / HDI
$= \dfrac{2}{k\pi}\Big[1-\cos\Big(k\dfrac{\pi}{2}\Big)\Big]$	Sorgfältig ausrechnen
$= \dfrac{2}{k\pi}\cdot\begin{cases} 1 & \text{für } k=1,3,5,7,9,11,\dots,\\ 2 & \text{für } k=2,6,10,\dots,\\ 0 & \text{für } k=4,8,12,\dots.\end{cases}$	Zur Information

4

5D. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von f an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} \pm \dots \quad \in [0.75, 0.83]$.

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\pi/2) = \sum_{j=0}^{\infty} b_{2j+1}(-1)^j$$ Auswerten in $x = \pi/2$ dank 5B

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{2(-1)^j}{\pi(2j+1)}$$ Einsetzen der Koeffizienten aus 5C

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)} = \frac{\pi}{4} = 0.7853981634\dots$$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erinnerung: Dies ist die berühmte Leibniz-Reihe mit ihrem ebenso berühmten Grenzwert. Dieses konkrete Ergebnis prüft zugleich die Plausibilität der vorhergehenden Rechnungen! $\overline{}$ 2

5E. Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot 2\pi\right) \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi}{4}$$ nach Skizze

$$A_k = -\frac{b_k}{k} = \frac{-2}{k^2\pi}\left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right]$$ nach Integrationsregel

$$B_k = \frac{a_k}{k} = 0$$ dank Symmetrie oder nach Integrationsregel

3

5F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von F an der Stelle $x = \pi/2$ den Wert der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(4j+2)^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{18^2} + \frac{1}{22^2} + \frac{1}{26^2} + \frac{1}{30^2} + \dots \in [0.30, 0.34]$.

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-2}{k^2\pi}\left[1 - \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)\right] \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)$$ Auswerten in $x = \pi/2$ dank Dirichlet

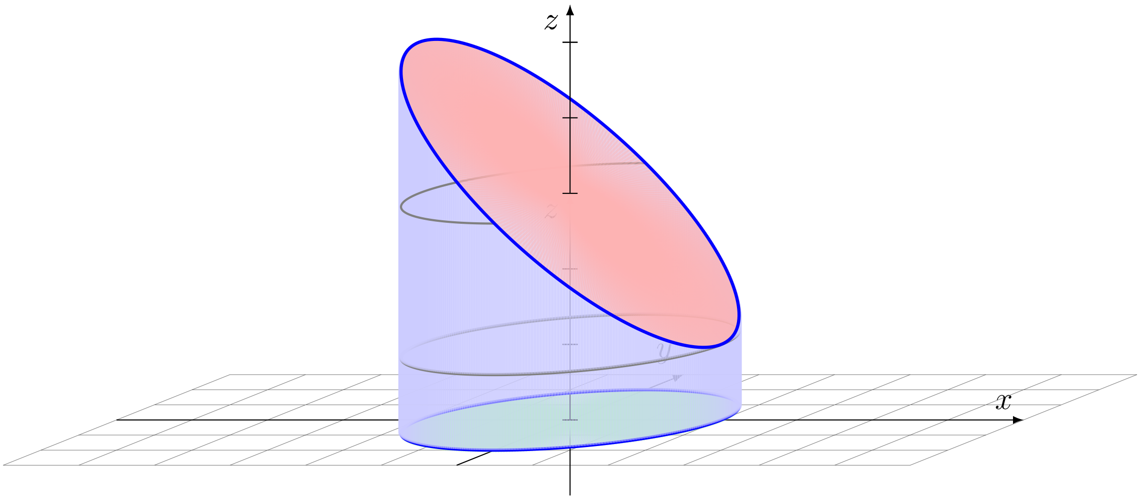
$$\frac{\pi}{8} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(4j+2)^2}$$ Einsetzen der Koeffizienten aus 5E

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{(4j+2)^2} = \frac{\pi^2}{32}$$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Eine weitere schöne Reihe, auch diesen Grenzwert erhalten wir dank Fourier–Theorie. Dieses konkrete Ergebnis prüft zugleich die Plausibilität der vorhergehenden Rechnungen! 3

Aufgabe 6. *Körper und Flächen, Gauß und Stokes (1+3+3+3+3+2+4+4 = 23 Punkte)*

6A. Skizzieren Sie den Körper $K = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3 - x\ \}$:



1

Seine Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B (mit $z = 0$), dem Mantel M (mit $x^2 + y^2 = 4$) und dem Deckel D (mit $z = 3 - x$). Wir orientieren alle drei wie üblich von K nach außen.

6B. Parametrisieren Sie den Mantel M in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \rho = \boxed{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ 0 \le z \le \boxed{3 - 2\cos\varphi} \end{cases}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} \boxed{-2\sin\varphi} \\ \boxed{+2\cos\varphi} \\ \boxed{0} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{0} \\ \boxed{0} \\ \boxed{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{2\cos\varphi} \\ \boxed{2\sin\varphi} \\ \boxed{0} \end{pmatrix}.$$

3

6C. Berechnen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(M)$ der Mantelfläche mit der Parametrisierung Φ:

$$\mathrm{vol}_2(M) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{3-2\cos\varphi} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \times \frac{\partial\Phi}{\partial z} \right| \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\varphi \quad \text{Definition dank obiger Parametrisierung}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=0}^{3-2\cos\varphi} 2\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\varphi \quad \text{Norm berechnen und einsetzen}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 6 - 4\cos\varphi\, \mathrm{d}\varphi = 12\pi \quad \text{Beide Integrale sind hier leicht.}$$

Plausibilitätscheck: Das Ergebnis 12π ist geometrisch plausibel, siehe Skizze, denn $\mathrm{vol}_2(M)$ entspricht dem Zylindermantel: Kreisumfang 4π mal mittlere Höhe 3. Hier ist der Mantel M zwar kein Zylindermantel, hat aber denselben Flächeninhalt: Dies rechnen Sie wie oben aus. Alternativ erhalten Sie es anschaulich durch Umklappen des oberen Teils auf den unteren.

3

6D. Parametrisieren Sie den Deckel D in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Psi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \boxed{3-\rho\cos\varphi} \end{pmatrix} \quad\text{mit}\quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{\cos\varphi} \\ \boxed{\sin\varphi} \\ \boxed{-\cos\varphi} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{-\rho\sin\varphi} \\ \boxed{+\rho\cos\varphi} \\ \boxed{+\rho\sin\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\rho} \\ \boxed{0} \\ \boxed{\rho} \end{pmatrix}.$$

3

6E. Berechnen Sie mit Ψ das Flussintegral von $f(x,y,z) = (0,0,z)$ durch D nach außen:

$$\int_D f(s)\bullet \mathrm{d}S = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\Psi(\rho,\varphi))\bullet\Big(\frac{\partial\Psi}{\partial\rho}\times\frac{\partial\Psi}{\partial\varphi}\Big)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Definition dank Parametrisierung

$$= \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(3-\rho\cos\varphi)\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Einsetzen, Skalarprodukt

$$= \int_{\rho=0}^{2} 6\pi\rho\,\mathrm{d}\rho = \Big[3\pi\rho^2\Big]_{\rho=0}^{2} = 12\pi$$ Beide Integrale sind leicht.

Erinnerung: Diese Integrale haben wir in der Vorlesung beim Archimedischen Prinzip betrachtet, wo der Wasserdruck proportional zu z ansteigt. Auch dort entsteht als Gesamtintegral das Volumen, wie wir dies in der folgenden Aufgabe erhalten.
Analogie: Die entsprechenden Greenschen Flächenformeln nutzen wir in Aufgabe 3.
Linearisierung: Bei einem affin-linearen Vektorfeld f und einem ebenen Flächenstück S mit Schwerpunkt $\overline{s}$ und Einheitsnormale $n(\overline{s})$ ist der Fluss $f(\overline{s})\cdot n(\overline{s})\cdot \mathrm{vol}_2(S)$.

3

6F. Berechnen Sie hieraus das Volumen von K mit dem Satz von Gauß:

$$\mathrm{vol}_3(K) = \int_K \mathrm{div}(f)\,\mathrm{d}(x,y,z)$$ Volumenintegral der Divergenz ist gleich…

$$= \int_B f(s)\bullet\mathrm{d}S + \int_M f(s)\bullet\mathrm{d}S + \int_D f(s)\bullet\mathrm{d}S$$ dem Flussintegral über die Randfläche.

$$= 0 + 0 + 12\pi = 12\pi$$ Zwei der Flussintegrale sind hier leicht.

Erläuterung: Das Vektorfeld f verschwindet auf dem Boden B und liegt tangential an der Mantelfläche M. *Plausibilitätscheck:* Das Ergebnis 12π ist geometrisch plausibel, siehe Skizze, denn $\mathrm{vol}_3(K)$ entspricht dem Vollzylinder: Kreisfläche 4π mal mittlere Höhe 3. Hier ist der Körper K zwar kein Zylinder, hat aber denselben Rauminhalt: Dies rechnen Sie wie oben aus, oder als Normalbereich in Zylinderkoordinaten. Alternativ erhalten Sie es anschaulich durch Umklappen des oberen Teils auf den unteren. Hier ist alles leicht.

2

Wir betrachten das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$g\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-y^2/2} - \mathrm{e}^{-2} \\ x\,\mathrm{e}^{z} \\ -\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{e}^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

6G. Berechnen Sie das Flussintegral von $\operatorname{rot}(g)$ durch die Fläche $M \cup D$ nach außen:

$$\int_M \operatorname{rot} g(s) \bullet \mathrm{d}S + \int_D \operatorname{rot} g(s) \bullet \mathrm{d}S$$ Was ist der Rand von $M \cup D$?

$$= \int_{t=0}^{2\pi} g\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin t \\ +2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$ Der Rand ist diese Kreislinie!

$$= \int_{t=0}^{2\pi} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{4(\cos^2 t + \sin^2 t)/2} - \mathrm{e}^{-2} \\ 2\cos t \\ \dots\text{egal}\dots \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -2\sin t \\ +2\cos t \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$ Einsetzen, ausrechnen

$$= \int_{t=0}^{2\pi} 4\cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\pi$$ Das Integral ist bekannt.

Erläuterung: Der Rand von $M \cup D$ besteht aus der Kreislinie $(x, y, 0)$ mit $x^2 + y^2 = 2$. Solche Fragen wurden in Vorlesung und Übung ausführlich diskutiert. Die Ellipse ist Rand des Deckels D und oberer Rand des Mantels M, aber jeweils entgegengesetzt orientiert, beide heben sich daher auf. Das ist bei „inneren Rändern“ immer so: Diese tragen zum Randintegral nichts bei und werden auch geometrisch nicht als Rand gewertet.

/4

6H. Berechnen Sie das Flussintegral von g durch die Bodenfläche B nach außen:

$$\int_B g(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{(x,y,0)\in B} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}(x,y)$$ Die Normale ist hier $(0, 0, -1)$.

$$= \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2/2} \cdot \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho$$ Funktionaldeterminante ρ nicht vergessen!

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{2} \mathrm{e}^{-\rho^2/2} \cdot \rho\,\mathrm{d}\rho$$ Substitution, wie beim Gaußschen Kunstgriff.

$$= 2\pi \Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2/2} \Big]_{\rho=0}^{2} = 2\pi\big(1 - \mathrm{e}^{-2}\big)$$ Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

Erläuterung: Ebenso können Sie D durch $\Phi : (\rho, \varphi) \mapsto (\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, 0)$ parametrisieren und die Normale $-(\partial_\rho \Phi \times \partial_\varphi \Phi) = (0, 0, -\rho)$ verwenden. Die Volumenverzerrung ρ entsteht in unserer obigen Rechnung ganz genauso, dort durch den Transformationssatz. *Erinnerung:* Das Integral kennen Sie vom Gaußschen Kunstgriff zur Berechnung von $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Erst der zusätzliche Faktor ρ ermöglicht die elementare Stammfunktion! Ohne geht’s nicht.

/4