

## Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

**Aufgabe 1.** Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name: <span style="color: blue;">Musterlösung</span>	Matrikelnummer: <span style="color: blue;">Musterlösung</span>
Vorname: <span style="color: blue;">Musterlösung</span>	Studiengang: <span style="color: blue;">Musterlösung</span>

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/14	/12	/13	/10	/74

*Erläuterung:* Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

*Tipp für zukünftige Leser:* Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

## Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion  $e^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$  für ausgewählte Werte von  $x$ :

$x$	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$e^x$	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
$e^{-x}$	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral  $\int_0^x \varphi(t) dt$  über die Normalverteilung  $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$ :

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für  $x = 1.23$  gilt  $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$ . Für  $x = 2.58$  gilt  $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$ .

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

**2A.** Auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V = \{ f(x) = a_0 + a_1 e^x + a_2 e^{2x} + a_3 e^{3x} \mid a_k \in \mathbb{R} \}$  betrachten wir die Ableitung  $\partial: V \rightarrow V: f \mapsto f'$  als lineare Abbildung. Ist  $\partial$  diagonalisierbar?

<i>Begründete Antwort:</i>
Ja. Bezüglich der Basis $(1, e^x, e^{2x}, e^{3x})$ wird $\partial$ dargestellt durch die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .
<i>Erläuterung:</i> Dasselbe kennen wir für die trigonometrischen Polynome $f(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ . Die Basis $(e^{ikx})_{k=-n}^n$ diagonalisiert die Ableitung $\partial$ , denn $\partial e^{ikx} = ik e^{ikx}$ . Genau aus diesem guten Grunde ist die Fourier-Theorie so nützlich zur Lösung von Differentialgleichungen! Es gibt viele Orthonormalbasen im Vektorraum $T \subset C^\infty([0, 2\pi], \mathbb{C})$ bezüglich des Skalarprodukts $\langle f \mid g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{x=0}^{2\pi} \overline{f(x)}g(x) dx$ , das Gram-Schmidt-Verfahren produziert sie routiniert am laufenden Band. Aber nur die Basis $(e^{ikx})_{k \in \mathbb{Z}}$ diagonalisiert zudem den Ableitungsoperator.

2

**2B.** Auf dem  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{ f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_k \in \mathbb{R} \}$  betrachten wir die Ableitung  $\partial: W \rightarrow W: f \mapsto f'$  als lineare Abbildung. Ist  $\partial$  diagonalisierbar?

<i>Begründete Antwort:</i>
Nein. Wir haben die Hauptvektorkette $x^3/3! \mapsto x^2/2! \mapsto x \mapsto 1 \mapsto 0$ , also $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
<i>Erläuterung:</i> Bezüglich der Basis $(1, x, x^2/2, x^3/3!)$ ist die zu $\partial$ gehörige Matrix ein Jordan-Block der Größe $4 \times 4$ . Demnach ist $\lambda = 0$ ein vierfacher Eigenwert, aber der Eigenraum ist nur eindimensional. Folglich ist die lineare Abbildung $\partial: W \rightarrow W$ nicht diagonalisierbar. Alternativ können Sie ebenso die Matrix bezüglich der Basis $(1, x, x^2, x^3)$ betrachten: Übung! Das Jordan-Phänomen ist keineswegs kompliziert oder künstlich, es tritt immer wieder in sehr einfachen und natürlichen Situationen auf, sogar schon bei der Ableitung von Polynomen!

2

**2C.** Gibt es eine Differentialgleichung  $y(x)' = a + b y(x) + c y(x)^2$  mit Konstanten  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , die keine Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  erlaubt?

<i>Begründete Antwort:</i>
Ja. Ein Beispiel ist $y'(x) = 1 + y(x)^2$ : Jede Lösung $y(x) = \tan(x - x_0)$ hat Polstellen!
<i>Erläuterung:</i> Jede lineare Gleichung $y'(x) = a(x) + b(x)y(x)$ hat globale Lösungen dank Integralformel. Mit quadratischem Term gilt dies nicht mehr: Angenommen, es gäbe eine Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $y'(x) = 1 + y(x)^2$ . Wegen $y' \geq 1$ hat die Funktion $y$ genau eine Nullstelle, $y(x_0) = 0$ . Für das Problem $y'(x) = 1 + y(x)^2$ mit Anfangswert $y(x_0) = 0$ kennen wir die eindeutige Lösung $y(x) = \tan(x - x_0)$ . Diese läuft für $x \rightarrow x_0 \pm \pi/2$ in Polstellen, ist also nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definiert, sondern nur auf dem (relativ kleinen) Intervall $]x_0 - \pi/2, x_0 + \pi/2[$ . Damit kennen wir <i>alle</i> Lösungen. Weitere Lösungen gibt es nicht dank Eindeutigkeitssatz, denn die rechte Seite ist stetig differenzierbar in $y$ . (Der Existenzsatz liefert nur lokale Lösungen, auf einem geeigneten Intervall um den Startpunkt, und mehr ist hier tatsächlich nicht möglich.) Für $y'(x) = 1 - y(x)^2$ hingegen haben wir konstante Lösungen $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: y(x) = \pm 1$ .

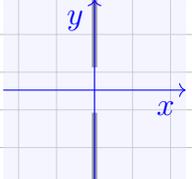
2

**2D.** Hat jede partielle Differentialgleichung  $(ax+by) \partial_x u(x, y) + x \partial_y u(x, y) = 0$  mit Konstanten  $a, b \in \mathbb{R}$  und Startwerten  $u(x, 0) = \sin(x)$  genau eine Lösung  $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ?

<i>Begründete Antwort:</i>
Nein. Das ist ein klassisches Warnbeispiel: Eine so gestellte partielle Differentialgleichung kann überbestimmt sein und keine globale Lösung $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ haben, wie $-y \partial_x u + x \partial_y u = 0$ , sie kann aber auch unterbestimmt sein und mehrere Lösungen haben, wie $y \partial_x u + x \partial_y u = 0$ .
<i>Erläuterung:</i> Zur Lösung solcher linearen PDE erster Ordnung kennen Sie die Charakteristikmethode wie in Vorlesung und Übung erklärt. Je nach Verlauf der charakteristischen Kurven erkennen Sie Über- und Unterbestimmtheit oder eindeutige Lösbarkeit. Im ersten Beispiel finden Sie Kreise, im zweiten Beispiel Hyperbeln; für Rechnungen und Bilder siehe Vorlesung.

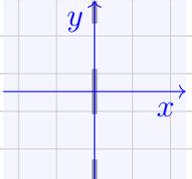
2

**2E.** Im Raum  $\mathbb{R}^3$  betrachten wir  $E = \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \geq 1 \}$ , eine Ebene mit Einzelspalt, und ihr Komplement  $U = \mathbb{R}^3 \setminus E$ . Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?

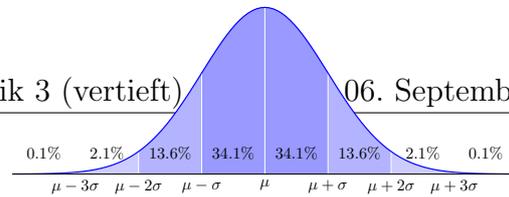
<i>Begründete Antwort:</i>	
Ja. Die Menge $U$ ist sternförmig und somit einfach zusammenhängend. <i>Tipp:</i> Machen Sie sich eine Skizze in der $x$ - $y$ -Ebene, das vereinfacht enorm!	
<i>Erläuterung:</i> Auf einfach zusammenhängenden Gebieten können Sie das Potentialproblem besonders gut lösen. Unser Beispiel $U$ ist offensichtlich nicht konvex, aber immerhin sternförmig bezüglich $(0, 0, 0)$ und somit einfach zusammenhängend. Diese Sichtweise zeigt Ihnen zudem, wie Sie zu jedem vorgelegten Vektorfeld $f$ mit $\text{rot}(f) = 0$ ein Potential $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ durch Arbeitsintegrale berechnen können, am einfachsten direkt entlang des Weges von $(0, 0, 0)$ nach $(x, y, z)$ , oder alternativ als Hakenintegral von $(0, 0, 0)$ über $(0, 0, z)$ und $(x, 0, z)$ nach $(x, y, z)$ . Dank Rotationsfreiheit und einfachem Zusammenhang ist das Ergebnis dieses Wegintegrals vom gewählten Integrationsweg unabhängig und definiert somit ein Potential.	

2

**2F.** Wir betrachten  $D = \{ (0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |y| \leq 1 \text{ oder } |y| \geq 3 \}$ , eine Ebene mit Doppelspalt, und ihr Komplement  $V = \mathbb{R}^3 \setminus D$ . Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld  $f: V \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Potential?

<i>Begründete Antwort:</i>	
Nein. Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x, y, z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$ . <i>Tipp:</i> Machen Sie sich eine Skizze in der $x$ - $y$ -Ebene, das vereinfacht enorm!	
<i>Erläuterung:</i> Dieses prominente Vektorfeld wurde in Vorlesung und Übung behandelt; es ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der $z$ -Achse. Auf ganz $V$ gilt $\text{rot}(f) = 0$ , aber dennoch gilt $\int_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$ entlang $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow V: t \mapsto (2 \cos t, 2 \sin t, 0)$ . Demnach ist $f$ zwar auf ganz $V$ rotationsfrei, kann aber dennoch kein Potential auf $V$ haben. Die Bedingung $\text{rot}(f) = 0$ ist notwendig für ein Potential, aber hinreichend erst für einfach zusammenhängende Gebiete. Unser Gebiet $V$ ist demnach nicht einfach zusammenhängend: $\text{rot}(f) = 0$ und $\int_{\gamma} f(s) \cdot ds \neq 0$ beweisen, dass sich der Weg $\gamma$ nicht zusammenziehen lässt! <i>Fun fact:</i> Diese Versuchsanordnung nutzt der Bohm-Aharanov-Effekt der Quantenmechanik.	

2



**Aufgabe 3.** *Wahrscheinlichkeitsrechnung* ( $4+3+3+2 = 12$  Punkte)

**3A.** Bei einer Wahl mit 1 Million Stimmberechtigten stimmten 45% für Kandidat A, 35% für B und 20% für C. Nach der Wahl befragen Sie 2500 zufällig ausgewählte Wähler. Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $p$  liegt dabei die Anzahl der C-Wähler zwischen 470 und 530 einschließlich? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

$\mu = 2500 \cdot \frac{1}{5} = 500$	Erwartungswert
$\sigma^2 = 500 \cdot \frac{4}{5} = 400, \quad \sigma = 20$	Varianz und Streuung
$p \approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t), \quad \alpha = 30.5/20 = 1.525$	Lokaler Grenzwertsatz
$\approx 2 \cdot 0.43637 = 0.87274 \approx 87\%$	Ablesen aus der Tabelle
<i>Erläuterung:</i> Bei Stichprobe ohne Zurücklegen ist die exakte Verteilung hypergeometrisch. Da jedoch die Gesamtpopulation von $10^6$ recht groß ist, genügt hier ebenso die naheliegende Binomialverteilung $B(n, t)$ als Modell, mit $n = 2500$ und $t = 1/5$ . Als bequeme Näherung für $B(n, t)$ nutzen wir schließlich die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen aussagekräftige Fehlerschranken, das wurde hier nicht gefragt. Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\alpha = 30/\sigma = 1.5$ und damit $p \approx 2 \cdot 0.43319 \approx 87\%$ ; das ist etwas ungenauer, der Unterschied verschwindet glücklicherweise in der Rundung. Der exakte Wert ist $p = 0.872785\dots$ , unsere Näherung ist hier also extrem gut.	

4

**3B.** Cambridge Analytica platziert eine gezielte Werbung  $W$  für C-Wähler in sozialen Medien; dank Targeting erreicht die Werbung 10% der A-Wähler, 30% der B-Wähler und 75% der C-Wähler. Mit welcher Wkt  $q$  (in %) ist ein zufällig ausgewählter Werbeempfänger ein C-Wähler?

$q = \mathbf{P}(C W) = \frac{\mathbf{P}(C \cap W)}{\mathbf{P}(W)}$	Definition der bedingten Wkt
$= \frac{\mathbf{P}(W C)\mathbf{P}(C)}{\mathbf{P}(W A)\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(W B)\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(W C)\mathbf{P}(C)}$	Formel von Bayes
$= \frac{0.75 \cdot 0.20}{0.10 \cdot 0.45 + 0.30 \cdot 0.35 + 0.75 \cdot 0.20}$	Daten einsetzen
$= \frac{0.15}{0.30} = \frac{1}{2} = 0.5 = 50\%$	Ausrechnen
<i>Erläuterung:</i> Bei dieser Aufgabe hilft, wie so oft, eine gute Notation, um über die gesuchten und die gegebenen Daten effizient buchzuführen. Das ist eigentlich die einzige Schwierigkeit, die anschließende Rechnung ist leicht. (Konzentration!) Sie können die Aufgabe auch in Baumform organisieren, wenn Ihnen das leichter fällt, die Rechnung ist dieselbe.	

3

**3C.** Zur Besetzung einer Juniorprofessur laden Sie fünf Bewerber ein. Erfahrungsgemäß sagt jeder dritte ab (zufällig, unabhängig voneinander). Mit welcher Wkt erscheinen  $X = 0, 1, 2, 3, 4, 5$  Bewerber? (Antwort exakt als gekürzter Bruch und gerundet auf den nächsten Prozentpunkt.)

Anzahl $k =$	0	1	2	3	4	5
exakt $\mathbf{P}(X=k) =$	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$
gerundet $\mathbf{P}(X=k) \approx$	0.00	0.04	0.16	0.33	0.33	0.13

3

*Erläuterung:* Die Aufgabenstellung führt unmittelbar zur Binomialverteilung  $k \mapsto B(5, \frac{2}{3})(k)$ : Wir haben  $n = 5$  unabhängige Versuche mit Trefferwkt  $t = 2/3$ . Der Rest ist sorgfältige Bruchrechnung. Die Rundungswerte addieren sich zu 99%. Gerundet ist eben nicht exakt.

**3D.** In einer Lostrommel liegen 10 Kugeln, davon 4 rote und 6 schwarze. Sie ziehen drei Kugeln zufällig ohne Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit  $p$  ziehen Sie genau eine rote und zwei schwarze Kugeln? (Ansatz als Formel und Ergebnis als gekürzter Bruch.)

$p = \frac{\binom{4}{1} \binom{6}{2}}{\binom{10}{3}} = \frac{\frac{4}{1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1}}{\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{1}{2}$	hypergeometrische Verteilung
<p><i>Erläuterung:</i> Die Aufgabenstellung führt direkt zu <math>H(10, 4, 3)(1) = H(10, 6, 3)(2) = 1/2</math>. Sie kennen dies aus Vorlesung und Übung. Sie können es sich auch selbst nochmal herleiten.</p>	
<p>Grenzwertsätze und Näherungen sind extrem nützlich für <i>große</i> Stichproben wie in Frage A. Die beiden Fragen C und D behandeln <i>kleine</i> Stichproben; Sie arbeiten dann direkt mit der Binomialverteilung bzw. der hypergeometrischen Verteilung. Ohne Taschenrechner kann die Rechnung leicht lästig werden, ich habe mich daher bemüht, freundliche Werte zu wählen. Es kann helfen, zuerst zu kürzen, statt sofort auszumultiplizieren. Sie üben hier nebenbei konzentriertes Bruchrechnen, anders kommt man an das Ergebnis nun einmal nicht heran.</p>	

2

**Aufgabe 4.** Differentialgleichungen (7+7 = 14 Punkte)

Zu lösen ist für  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  die Differentialgleichung  $y + [1 - e^{-x}y] y' = 0$  mit  $y(0) = -1$ .

**4A.** Ist diese Differentialgleichung exakt? Berechnen Sie hierzu die Rotation des zugehörigen Vektorfeldes  $(f, g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$\text{rot}(f, g) = \partial_x g - \partial_y f = e^{-x}y - 1 \neq 0$	Unsere DG ist nicht exakt!
<i>Erläuterung:</i> Der Differentialgleichung entnehmen wir $f(x, y) = y$ und $g(x, y) = 1 - e^{-x}y$ . Wegen $\text{rot}(f, g) \neq 0$ gibt es sicher kein Potential $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\partial_x \Phi, \partial_y \Phi) = (f, g)$ . Diese Rechnung nutzen wir zur Konstruktion eines integrierenden Faktors...	

Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor  $\lambda$ , der nur von  $x$  oder  $y$  abhängt:

$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} = -\frac{\text{rot}(f, g)}{g} = 1$	Bedingung an $\lambda(x)$
$\implies \ln \lambda(x) = x + c$	Beide Seiten integrieren
$\implies \lambda(x) = C e^x$	Exponentialfunktion anwenden, $C = e^c > 0$
<i>Erläuterung:</i> Das skalierte Vektorfeld $(e^x f, e^x g): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist rotationsfrei (Probe!). (Es genügt, irgendeine Konstante $C > 0$ zu wählen, am einfachsten scheint $C = 1$ .) Der Definitionsbereich $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend (da sternförmig, sogar konvex), demnach existiert ein Potential $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $(\partial_x \Phi, \partial_y \Phi) = (e^x f, e^x g) = (e^x y, e^x - y)$ . Ein solches Potential finden Sie nun leicht durch koordinatenweise Integration. (Dieses Beispiel erlaubt keinen integrierenden Faktor, der nur von $y$ abhängt.)	

4

Bestimmen Sie zum skalierten Vektorfeld  $\lambda \cdot (f, g)$  das Potential  $\Phi(x, y)$  mit  $\Phi(0, -1) = 0$ :

$$\Phi(x, y) = -\frac{1}{2}y^2 + e^x y + \frac{3}{2} \quad \text{Dank koordinatenweiser Integration, wie geübt!}$$

Lösen Sie damit die Differentialgleichung  $y + [1 - e^{-x}y] y' = 0$  zum Startwert  $y(0) = -1$ .

$$y(x) = e^x - \sqrt{e^{2x} + 3} \quad \text{Auflösen dank Mitternachtsformel, negativer Zweig!}$$

3

**4B.** Zu lösen ist für  $u: \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: (t, x) \mapsto u(t, x)$  die partielle Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u(t, x) + \cos(t) \partial_x u(t, x) &= \frac{3}{2} \sqrt{t} && \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}, \\ u(0, x) &= e^x && \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

*Erläuterung:* Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung.

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu  $u(t(s), x(s)) = z(s)$  an:

$$\begin{aligned} t'(s) &= 1, && t(0) = 0, \\ x'(s) &= \cos[t(s)], && x(0) = x_0, \\ z'(s) &= \frac{3}{2} t(s)^{1/2}, && z(0) = e^{x_0}. \end{aligned}$$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik  $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$ :

$$t(s) = s, \quad x(s) = x_0 + \sin(s), \quad z(s) = s^{3/2} + e^{x_0}$$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung: *Wir lösen  $u(t(s), x(s)) = z(s)$  auf und erhalten*

$$u(t, x) = t^{3/2} + e^{x - \sin(t)} \quad \text{Startwerte transportiert längs Charakteristiken}$$

Machen Sie schließlich die Probe: *Wir leiten  $u(t, x)$  geduldig ab und erhalten*

$$\partial_t u(t, x) = \frac{3}{2} t^{1/2} - \cos(t) e^{x - \sin(t)} \quad \text{nach Produkt- und Kettenregel}$$

$$\cos(t) \partial_x u(t, x) = \cos(t) e^{x - \sin(t)} \quad \text{Probe: } u(t, x) \text{ erfüllt die PDE!}$$

**Aufgabe 5.** *Lineare Differentialgleichungssysteme* (2+3+3+4 = 12 Punkte)

Zu lösen ist  $y'(t) = Ay(t)$ . Gegeben sind hierzu die Systemmatrix  $A$  und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1+i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**5A.** Einer der Vektoren  $u_1, u_2, u_3$  ist ein Eigenvektor von  $A$ : Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor  $v_1 = u_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  Dank Probe! zum Eigenwert  $\lambda_1 = -i$

2

Einer der Vektoren  $u_1, u_2, u_3$  ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von  $A$  zum Eigenwert  $\lambda_3 = \lambda_4 = i$ . Geben Sie die Hauptvektorkette  $v_4 \mapsto v_3 \mapsto 0$  aus Hauptvektor  $v_4$  und Eigenvektor  $v_3$  an:

$v_4 = u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1+i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}$  Dank Probe!  $\mapsto v_3 = (A - i)v_4 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $(A - i)v_3 = 0$   
Bem.:  $v_3 = \bar{v}_1$

Bestimmen Sie  $v_2 \in \mathbb{C}^4$  so, dass  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_2 = \bar{v}_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -1-i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$  komplex-konjugierter Hauptvektor! Damit erhalten wir die Basis  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$

3

**5B.** Bestimmen Sie die Lösung  $y_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$  mit  $y_1'(t) = Ay_1(t)$  und  $y_1(0) = v_1$ :

$y_1(t) = e^{-it}v_1 = e^{-it} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  Dies ist eine komplexe Eigenfunktion.

Bestimmen Sie die Lösung  $y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$  mit  $y_4'(t) = A y_4(t)$  und  $y_4(0) = v_4$ .

$$y_4(t) = e^{it}(v_4 + tv_3) \quad \text{Dies ist eine komplexe Hauptfunktion.}$$

Bestimmen Sie die Lösung  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^4$  mit  $y'(t) = A y(t)$  und  $y(0) = u_1 = \operatorname{Im} v_1 = \frac{v_1 - v_3}{2i}$

$$y(t) = \operatorname{Im} y_1(t) = \frac{y_1(t) - y_3(t)}{2i} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \\ 0 \\ -\sin t \end{pmatrix} \quad \text{Realteil / Linearkombination.}$$

3

**5C.** Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSsystem  $y'(t) = A y(t) + 2t(\cos t, \sin t, 0, \sin t)$  mit  $y(0) = 0$  besitzt eine Lösung der Form  $y_p(t) = c(t)(\cos t, \sin t, 0, \sin t)$ . Berechnen Sie:

$$y_p'(t) = c'(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \\ \sin t \end{pmatrix} + c(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{Ableitung nach Produktregel.}$$

$$A y_p(t) = c(t) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{Homogene Lösung wie oben!}$$

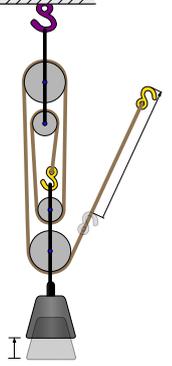
Einsetzen in unser inhomogenes DGSsystem ergibt folgende Differentialgleichung für  $c$ :

$$c'(t) = 2t \quad \text{mit Startwert } c(0) = 0.$$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert  $y(0) = 0$  ist daher:

$$c(t) = t^2 \quad \text{Machen Sie die Probe!}$$

4



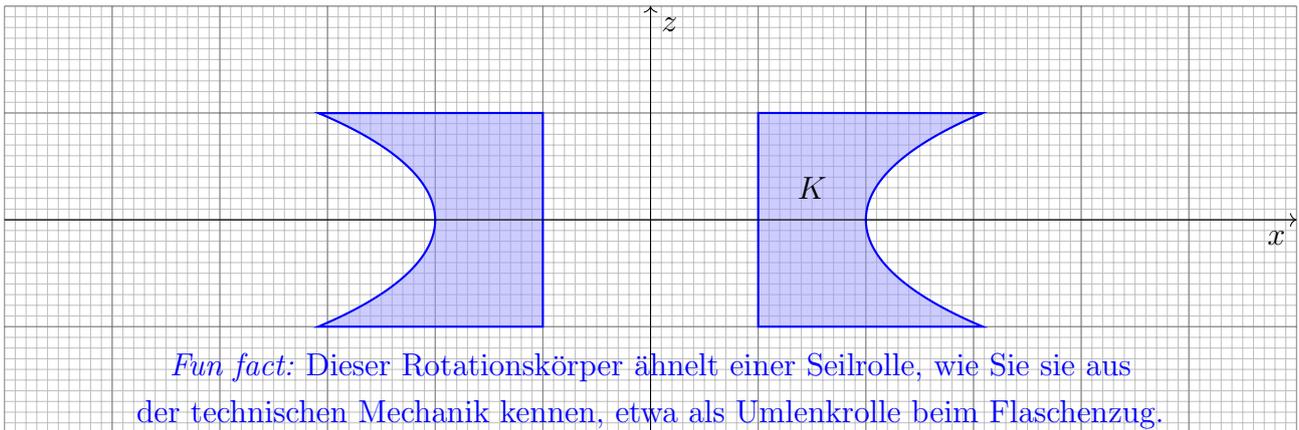
**Aufgabe 6.** *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (2+4+3+4 = 13 Punkte)

Der Rotationskörper  $K \subset \mathbb{R}^3$  und das Vektorfeld  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{array}{l} z^2 \leq 1 \\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \cosh(z)^2 \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ e^{x^2/4} e^{y^2/4} \end{pmatrix}.$$

*Erinnerung:* Es gilt  $\cosh(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$  und  $\sinh(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$ .

**6A.** Skizzieren Sie den Schnitt von  $K$  mit der  $x$ - $z$ -Ebene, also mit der Ebene  $y = 0$ :



Parametrisieren Sie den Körper  $K$  in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ \rho \sin \varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ -1 \leq z \leq 1 \\ \boxed{1} \leq \rho \leq \boxed{2 \cosh(z)} \end{cases}$$

**6B.** Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen  $\text{vol}_3(K) \approx 29$  des Körpers  $K$ :

$\text{vol}_3(K) = \int_K 1 \, d(x, y, z) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-1}^1 \int_{\rho=1}^{2 \cosh(z)} \rho \, d\rho \, dz \, d\varphi$	Transformationssatz
$= 2\pi \int_{z=-1}^1 \left[ \frac{\rho^2}{2} \right]_{\rho=1}^{2 \cosh(z)} dz = \pi \int_{z=-1}^1 4 \cosh(z)^2 - 1 \, dz$	Integrale vereinfachen
$= \pi \int_{z=-1}^1 (e^z + e^{-z})^2 - 1 \, dz = \pi \int_{z=-1}^1 e^{2z} + 1 + e^{-2z} \, dz$	Stammfunktion
$= \left[ \frac{1}{2} e^{2z} + z - \frac{1}{2} e^{-2z} \right]_{z=-1}^1 = \pi(e^2 + 2 - e^{-2}) = 29.0714 \dots$	Einsetzen
<i>Erläuterung:</i> Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen! Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine. In den letzten zwei Zeilen können Sie auch $2 \cosh(2z)$ zu $\sinh(2z)$ integrieren.	

**6C.** Die Randfläche  $\partial K$  besteht aus dem Boden  $B$  mit  $z = -1$ , dem Deckel  $D$  mit  $z = +1$ , dem Mantel  $M$  und dem Zylinder  $Z$ . Berechnen Sie den Fluss von  $f$  aus  $K$  heraus durch  $D$ :

$$I_D = \int_{s \in D} f(s) \cdot dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^{2 \cosh(1)} e^{\rho^2/4} \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \quad \text{Parametrisierung des Deckels}$$

$$= 2\pi \left[ 2 e^{\rho^2/4} \right]_{\rho=1}^{2 \cosh(1)} = 4\pi \left[ e^{\cosh(1)^2} - e^{1/4} \right] \quad \text{Stammfunktion, Grenzen einsetzen}$$

*Erläuterung:* Für den Kreisring  $D$  sind Normalenvektor und Integral besonders einfach. Zur Übung können Sie nochmal die Flächenparametrisierung  $\Phi_D$  explizit ausschreiben und den Normalenvektor  $\partial_\rho \Phi_D \times \partial_\varphi \Phi_D$  ausrechnen. Das Ergebnis entspricht der Anschauung. Diese Standardrechnungen können Sie hier routiniert und effizient einsetzen.

Folgern Sie den Fluss  $I_B$  des Vektorfeldes  $f$  aus  $K$  heraus durch den Boden  $B$ :

$$I_B = \int_{s \in B} f(s) \cdot dS = -I_D \quad \text{Negativer Integrand, da Normalenvektor nach unten.}$$

3

**6D.** Berechnen Sie den Fluss  $I_Z$  des Vektorfeldes  $f$  aus  $K$  heraus durch den Zylinder  $Z$ :

$$I_Z = \int_{s \in Z} f(s) \cdot dS = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-1}^1 \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ e^{1/4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\cos \varphi \\ -\sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix} dz \, d\varphi \quad \text{Einsetzen}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=-1}^1 -1 \, dz \, d\varphi = -4\pi \quad \text{Vereinfachen}$$

*Erläuterung:* Auch für den Zylinder  $Z$  sind Normalenvektor und Integral recht einfach. Diese Standardrechnungen können Sie hier routiniert und effizient einsetzen.

Folgern Sie den Fluss  $I_M$  des Vektorfeldes  $f$  aus  $K$  heraus durch den Mantel  $M$ :

$$\underbrace{I_D + I_B}_{=0} + \underbrace{I_Z}_{=-4\pi} + I_M = \int_{s \in \partial K} f(s) \, dS \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_K \operatorname{div}(f) \, dK = 2 \operatorname{vol}_3(K) = 2\pi(e^2 + 2 - e^{-2})$$

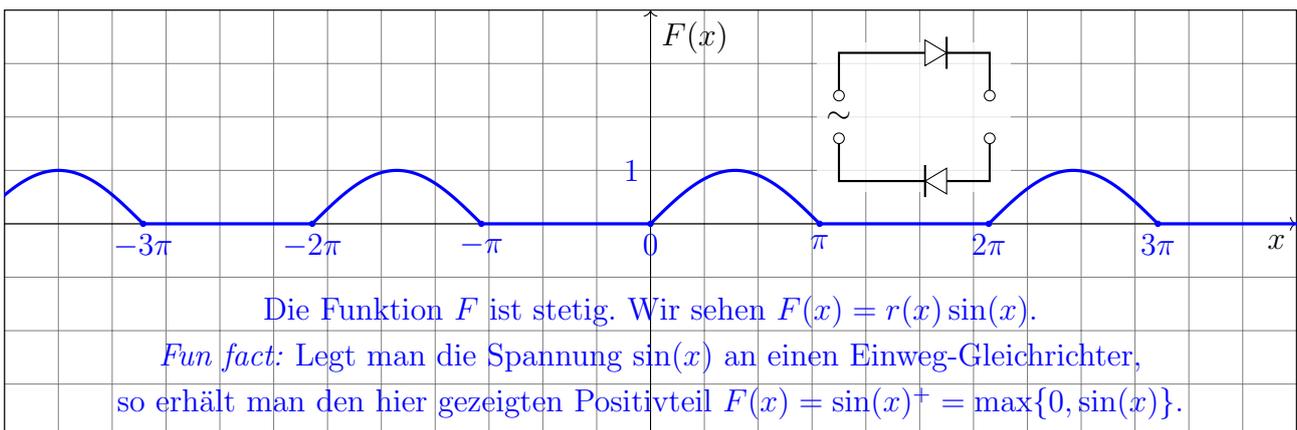
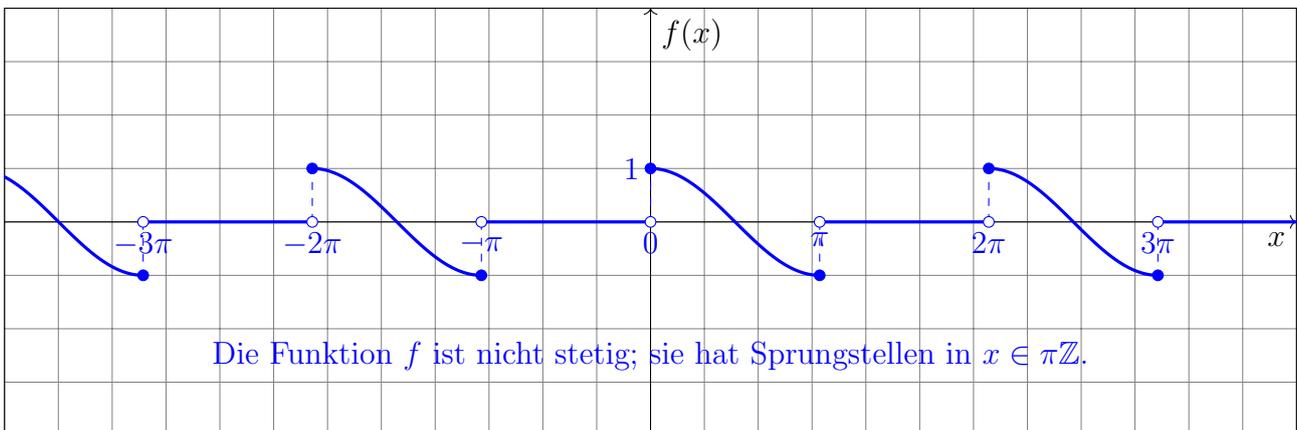
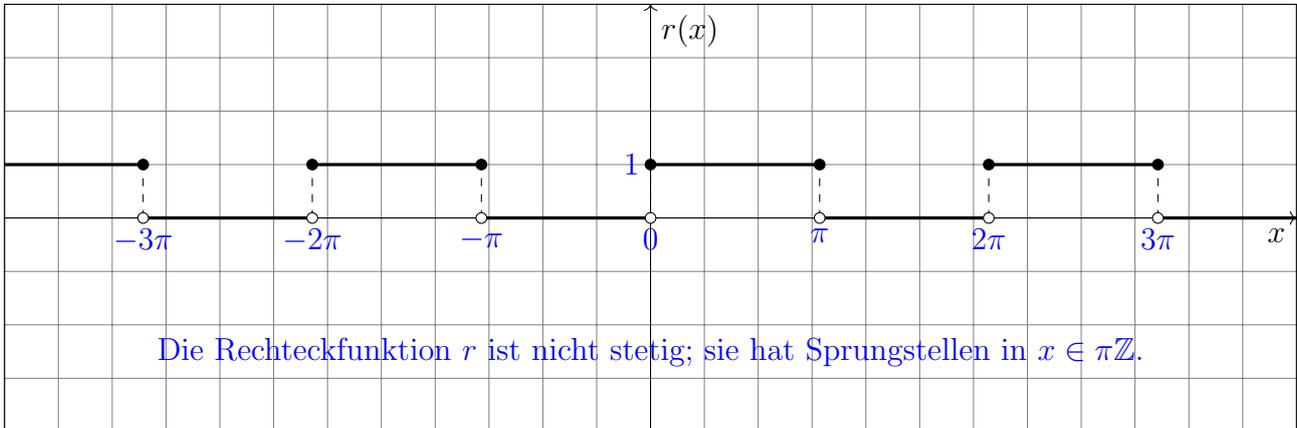
$$I_M = 2\pi(e^2 + 4 - e^{-2})$$

*Erläuterung:* Sie können das Flussintegral  $I_M$  wie die anderen auch direkt ausrechnen: Mantelfläche  $M$  parametrisieren, Normalenvektor  $dS$  ausrechnen, Skalarprodukt mit dem Vektorfeld  $f$  liefert den Integranden, ... Versuchen Sie es einmal als Übung und vergleichen Sie beide Rechenwege. Mit dem Integralsatz von Gauß geht es hier wesentlich effizienter.

4

**Aufgabe 7. Fourier-Reihen** (3+3+2+2 = 10 Punkte)

**7A.** Die Rechteckfunktion  $r: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $2\pi$ -periodisch mit  $r(x) = 0$  für  $-\pi < x < 0$  und  $r(x) = 1$  für  $0 \leq x \leq \pi$ . Skizzieren Sie  $f(x) = r(x) \cos(x)$  und  $F(x) = \int_{t=0}^x f(t) dt$  auf  $[-12, 12]$ :



Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  von  $f$  im Punkt  $x = \pi$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Dank Dirichlet-Kriterium!

**7B.** Berechnen Sie die Koeffizienten  $\gamma_k$  der komplexen Fourier-Reihe  $r(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikx}$ :

$$\gamma_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{k\pi i} = \frac{-i}{\pi} \cdot \frac{1}{k} & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \neq 0 \text{ gerade.} \end{cases}$$

---

 3

*Erinnerung:* Dank der Euler-Formel  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$  gilt

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{und} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

*Tipp:* Das hilft beim Ausmultiplizieren von  $f(x) = r(x) \cos(x)$ .

**7C.** Folgern Sie die Koeffizienten  $c_k$  der komplexen Fourier-Reihe

$$f(x) \sim \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx} :$$

$$c_k = \begin{cases} \frac{-i}{2\pi} \left[ \frac{1}{k-1} + \frac{1}{k+1} \right] = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{ki}{k^2-1} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

---

 2

**7D.** Folgern Sie die Koeffizienten  $C_k$  der komplexen Fourier-Reihe

$$F(x) \sim \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{4i} + \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{ikx} :$$

$$C_k = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k^2-1} & \text{für } k \text{ gerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

---

 2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.