Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/14	/12	/14	/10	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Nutzen Sie dies, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Auf dem Dreieck $D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le 2y \le x \le 2 \}$ sei $f : D \to \mathbb{R}$ messbar und beschränkt, also $|f| \le M < \infty$. Gilt dann $\int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x/2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1} \int_{x=2y}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$?

Begründete Antwort:

Ja, denn f ist absolut integrierbar, wir können also den Satz von Fubini anwenden.

Erläuterung: Der Satz von Fubini erfordert absolute Integrierbarkeit. Dies ist hier gesichert, denn es gilt $\int_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}(x,y) \le \int_D M\,\mathrm{d}(x,y) = \mathrm{vol}_2(D) \cdot M < \infty$ nach Voraussetzung. (Andernfalls kennen Sie warnende Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung.) Damit gilt:

$$\int_D f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{x=0}^{2} \int_{y=0}^{x/2} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{y=0}^{1} \int_{x=2y}^{2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Beachten Sie, dass die Integrationsgrenzen geeignet umgeschrieben werden mussten: Skizze!

$\overline{}$ 2

2B. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer C^∞–glatten 2π–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Begründete Antwort:

Ja. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/2)^k = 1/(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}/2) = f(x)$ ist 2π–periodisch und C^∞–glatt.

Erläuterung: Schnelles Abklingen der Fourier–Koeffizienten entspricht Glattheit der Funktion. Sie kennen hierzu das L^2–Kriterium $\sum |c_k|^2 < \infty$ oder das C^n–Kriterium $\sum |c_k| k^n < \infty$. In unserem Beispiel klingen die Koeffizienten extrem schnell ab, so dass das C^n–Kriterium für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist: Die so dargestellte Funktion f ist also tatsächlich C^∞–glatt. Besser noch können Sie die Reihe sogar explizit ausrechnen: Sie erkennen hier die geometrische Reihe! Gleiches gilt für alle Potenzreihen im Inneren ihres Konvergenzkreises, etwa $\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}/k!$.

$\overline{}$ 2

2C. Gibt es Differentialgleichungen $y'(x) = f(y(x))$ mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sodass sich manche Lösungen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ überkreuzen, genauer $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

Ja. Ein prominentes Beispiel ist $y' = \sqrt[3]{y^2}$, also mit $f(y) = \sqrt[3]{y^2}$ als rechter Seite.

Erläuterung: Sie kennen dieses Beispiel aus der Übung: Die Gleichung $y'(x) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ hat als mögliche Lösungen $u(x) = x^3/27$ und $v(x) = 0$. Diese Lösungen kreuzen sich also, ebenso unendlich viele weitere. Der Eindeutigkeitssatz ist hier nicht anwendbar, denn die rechte Seite $f(y) = \sqrt[3]{y(x)^2}$ ist nicht stetig differenzierbar nach y. Ist die rechte Seite hingegen stetig differenzierbar nach y, so garantiert der Eindeutigkeitssatz, dass durch jeden Punkt genau eine maximale Lösung geht, insbesondere können sich Lösungen nicht kreuzen. Im Beispiel gilt dies für $y > 0$ und für $y < 0$; das Problem besteht demnach nur auf der x–Achse $y = 0$.

$\overline{}$ 2

2D. Ist der Fixpunkt $(0,0)$ des Differentialgleichungssystems $\dot{x} = 2x + y$, $\dot{y} = y^2 + 3x$ stabil?

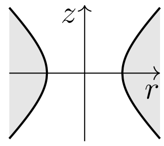
Begründete Antwort:

Nein. Die Jacobi–Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ hat Determinante $\det A = -3 < 0$, also einen negativen und einen positiven Eigenwert. Letzteres bedeutet Instabilität; Abweichungen explodieren.

Erläuterung: Wir nutzen hier die Klassifikation zweidimensionaler Dynamik um einen Fixpunkt. Ausführlich können wir die Eigenwerte auch explizit ausrechnen: Das char. Polynom ist $p_A(x) = \det(A - xE) = (2-x)(0-x) - (+1)(+3) = x^2 - 2x - 3 = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$, die Eigenwerte somit $\lambda_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+3} = 1 \pm 2$. Die zugehörigen Eigenvektoren $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ liefern die allgemeine Lösung $c_1\,\mathrm{e}^{-t} v_1 + c_2\,\mathrm{e}^{3t} v_2$. Alle Lösungen mit $c_2 \neq 0$ sind instabil. Geometrisch gesehen haben wir einen hyperbolischen Fixpunkt (Sattelpunkt). Stochastisch gesehen, bei stetiger Verteilung der Startwerte um den Nullpunkt, sind fast alle Lösungen instabil.

/2

2E. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir den Rotationskörper
$U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 \le x^2 + y^2 - 1 \,\}$ wie rechts skizziert.
Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?



Begründete Antwort:

Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Wirbelfeld $f(x,y,z) = (-y, x, 0)/(x^2 + y^2)$.

Erläuterung: Dieses prominente Vektorfeld wurde in Übung und Vorlesung behandelt; es ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der z–Achse. Auf ganz U gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$, aber dennoch gilt $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s \neq 0$ entlang $\gamma : [0, 2\pi] \to U : t \mapsto (2\cos t, 2\sin t, 0)$. Demnach ist f zwar auf ganz U rotationsfrei, kann aber dennoch kein Potential auf U haben. Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für ein Potential, aber hinreichend erst für einfach zusammenhängende Gebiete. Unser Gebiet U ist demnach nicht einfach zusammenhängend: $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s \neq 0$ beweisen, dass sich der Weg γ nicht zusammenziehen lässt!

/2

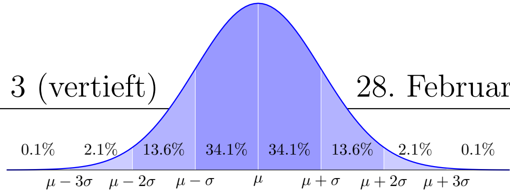
2F. Sei $V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < z^2 + 1 \,\}$ das Komplement von U.
Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : V \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?

Begründete Antwort:

Ja. Die Menge V ist sternförmig und somit einfach zusammenhängend.

Erläuterung: Auf einfach zusammenhängenden Gebieten können Sie das Potentialproblem besonders gut lösen. Unser Beispiel V ist offensichtlich nicht konvex, aber immerhin sternförmig bezüglich $(0,0,0)$ und somit einfach zusammenhängend. Diese Sichtweise zeigt Ihnen zudem, wie Sie zu jedem vorgelegten Vektorfeld f mit $\operatorname{rot}(f) = 0$ ein Potential $F : V \to \mathbb{R}$ durch Arbeitsintegrale berechnen können, am einfachsten direkt entlang des Weges von $(0,0,0)$ nach (x,y,z), oder alternativ von $(0,0,0)$ über $(0,0,z)$ nach (x,y,z). Dank Rotationsfreiheit und einfachem Zusammenhang ist das Ergebnis vom gewählten Integrationsweg unabhängig.

/2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+3+4 = 11 Punkte)*

3A. Die deutschen Euromünzen werden geprägt in A = Berlin (20%), D = München (20%), F = Stuttgart (25%), G = Karlsruhe (15%) und J = Hamburg (20%). Sie wählen zufällig 1200 deutsche Euromünzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p kommen höchstens 315 aus Stuttgart? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

$\mu = 1200 \cdot \dfrac{1}{4} = 300$ Erwartungswert

$\sigma^2 = 300 \cdot \dfrac{3}{4} = 225, \qquad \sigma = 15$ Varianz und Streuung

$p \approx \displaystyle\int_{-\infty}^{\alpha} \varphi(t), \qquad \alpha = 15.5/15 = 1.03333\ldots$ Lokaler Grenzwertsatz

$\approx 0.849 \approx 85\%$ Ablesen aus der Tabelle

Erläuterung: Bei Stichprobe ohne Zurücklegen ist die exakte Verteilung hypergeometrisch. Da jedoch die Gesamtzahl der Münzen enorm groß ist, genügt hier ebenso die naheliegende Binomialverteilung $B(n,t)$ als Modell, mit $n = 1200$ und $t = 3/4$. Als bequeme Näherung für $B(n,t)$ nutzen wir schließlich die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ dank lokalem Grenzwertsatz. Die Vorlesung erklärt Ihnen aussagekräftige Fehlerschranken, das wurde hier nicht gefragt. Ohne Stetigkeitskorrektur erhalten Sie $\alpha = 15/\sigma = 1$ und $p \approx 0.841 \approx 84\%$; das ist etwas ungenauer. Der exakte Wert ist $p = 0.84920\ldots$, unsere Näherung ist hier also sehr gut.

4

3B. Sie suchen einem Prägefehler, der insgesamt mit Wkt $1/1000 = 0.1\%$ auftritt. Sie wählen zufällig 2000 Münzen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q finden Sie höchstens 2 fehlerhafte? (Ergebnis wie üblich in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

$\lambda = \dfrac{2000}{1000} = 2$ Erwartungswert der Trefferzahl

$q \approx \left[\dfrac{\lambda^0}{0!} + \dfrac{\lambda^1}{1!} + \dfrac{\lambda^2}{2!}\right] \mathrm{e}^{-\lambda}$ Näherung durch Poisson–Verteilung

$\approx 5 \cdot 0.135 = 0.675 \approx 68\%$ Einsetzen und ausrechnen

Erläuterung: Exakt wäre hier die Binomialverteilung $B(n,t)$ mit $n = 2000$ und $t = 1/1000$. Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe nutzen wir als Näherung hier Poissons Gesetz der kleinen Zahlen. Der exakte Wert ist $q = 0.67667\ldots$, die Poisson–Näherung ist wie erwartet sehr gut. Die Vorlesung erklärt Ihnen die apriori Fehlergrenzen, das wurde hier nicht gefragt.

Fun fact: Es gibt hier keinerlei Grund, den lokalen Grenzwertsatz zu nutzen.
Wenn Sie es dennoch tun, finden Sie $\int_{-2.5/\sigma}^{0.5/\sigma} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.59975 \approx 60\%$.
Diese Näherung ist nicht gut genug; das war zu erwarten.

3

3C. Zur Qualitätskontrolle sortiert eine Maschine gebrauchte Münzen in fünf Kisten. Münzen aus Stuttgart landen mit 80% Wkt in Kiste K_3, andere Münzen landen mit 20% Wkt in Kiste K_3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) landet eine zufällige Münze in Kiste K_3?

$\mathbf{P}(K_3) = \mathbf{P}(K_3 \cap F) + \mathbf{P}(K_3 \cap \overline{F})$ Disjunkte Zerlegung

$= \mathbf{P}(K_3|F)\,\mathbf{P}(F) + \mathbf{P}(K_3|\overline{F})\,\mathbf{P}(\overline{F})$ Formel der totalen Wkt

$= 0.8 \cdot 0.25 + 0.2 \cdot 0.75 = 0.35 = 35\%$ Einsetzen und ausrechnen

2

Sie entnehmen zufällig eine Münze aus der Kiste K_3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) wurde sie in Stuttgart geprägt?

$\mathbf{P}(F|K_3) = \mathbf{P}(K_3 \cap F)/\mathbf{P}(K_3)$ Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit

$= \mathbf{P}(K_3|F)\,\mathbf{P}(F)/\mathbf{P}(K_3)$ Formel von Bayes / Dreisatz

$= 0.8 \cdot 0.25/0.35 = 4/7 \approx 57\%$ Einsetzen und ausrechnen

Erläuterung: Bei dieser Aufgabe hilft, wie so oft, eine gute Notation, um über die gesuchten und die gegebenen Daten effizient buchzuführen. Das ist eigentlich die einzige Schwierigkeit, die anschließende Rechnung ist leicht. (Konzentration!) Sie können die Aufgabe auch in Baumform organisieren, wenn Ihnen das leichter fällt, die Rechnung ist dieselbe.

2

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen (4+3+7 = 14 Punkte)*

4A. Zu lösen ist die lineare Differentialgleichung $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = x^2 + 4x + 5 = (x + 2 + \mathrm{i})(x + 2 - \mathrm{i})$$

Quadratisches Polynom

Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = c_1\, \mathrm{e}^{(-2-\mathrm{i})t} + c_2\, \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} \text{ mit } c_1, c_2 \in \mathbb{C}$$

Komplexe Fundamentallösungen

Folgern Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = a_1\, \mathrm{e}^{-2t} \cos(t) + a_2\, \mathrm{e}^{-2t} \sin(t) \text{ mit } a_1, a_2 \in \mathbb{R}$$

Reelle Fundamentallösungen

4

4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \mathrm{e}^t$.

$$y(t) = \frac{1}{p(1)}\, \mathrm{e}^t = \frac{1}{10}\, \mathrm{e}^t$$

Exponentialansatz / Lösungsformel

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}$.

$$y(t) = \frac{1}{p'(-2+\mathrm{i})}\, t\, \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\, t\, \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\, t\, \mathrm{e}^{(-2+\mathrm{i})t}$$

Resonanz, Lösungsformel

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cos(t)$.

$$y(t) = \operatorname{Re}\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-2t} \cos(t) + \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-2t} \sin(t)\Big] = \frac{1}{2} t\, \mathrm{e}^{-2t} \sin(t)$$

Realteil der vorigen Lösung

3

4C. Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + 2t\,\partial_x u(t,x) = -u(t,x) \qquad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \cos(x) \qquad \text{für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

Erläuterung: Dies ist ein Spezialfall der allgemeinen Transportgleichung.

Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem zu $u(t(s), x(s)) = z(s)$ an:

$t'(s) = 1,$ $\qquad t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{2t(s)},$ $\qquad x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{-z(s)},$ $\qquad z(0) = \cos(x_0).$

Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik $s \mapsto (t(s), x(s), z(s))$:

$t(s) = s,$ $\quad x(s) = \boxed{x_0 + s^2},$ $\quad z(s) = \boxed{e^{-s}\cos(x_0)}$

Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung: Wir lösen $u(t(s), x(s)) = z(s)$ auf und erhalten

$u(t,x) = \boxed{e^{-t}\cos(x - t^2)}$ Startwerte transportiert längs Charakteristiken

Machen Sie schließlich die Probe: Wir leiten $u(t,x)$ geduldig ab und erhalten

$\partial_t u(t,x) = \boxed{-e^{-t}\cos(x - t^2) + 2t\,e^{-t}\sin(x - t^2)}$ nach Produkt- und Kettenregel

$2t\,\partial_x u(t,x) = \boxed{-2t\,e^{-t}\sin(x - t^2)}$ Probe: $u(t,x)$ erfüllt die PDE!

$\frac{}{7}$

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (*2+4+2+4 = 12 Punkte*)

Zu lösen ist $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 10 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -8 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor von A: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 = \boxed{u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Dank Probe!}}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = \boxed{-2}$

2

5B. Die drei verbleibenden Eigenwerte $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ von A sind gleich, berechnen Sie diese:

$\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \boxed{1}$

Wir untersuchen $A - 1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 3 & 9 & -6 & -9 \end{pmatrix}$.

Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe von A. Geben Sie die Hauptvektorkette $v_3 \mapsto v_2 \mapsto 0$ aus Hauptvektor v_3 und Eigenvektor v_2 an:

$v_3 = \boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{Dank Probe!}} \mapsto v_2 = \boxed{(A-1)v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (A-1)v_2 = 0}$

Bestimmen Sie $v_4 \in \mathbb{R}^4$ so, dass (v_1, v_2, v_3, v_4) eine Basis aus Hauptvektorketten bildet:

$v_4 = \boxed{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{weiterer Eigenvektor!}}$ unabhängig von v_2, damit Basis (v_1, v_2, v_3, v_4)

4

5C. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_1'(t) = A\,y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$.

$$y_1(t) = \boxed{\mathrm{e}^{-2t} v_1 = \mathrm{e}^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Dies ist eine reelle Eigenfunktion.}}$$

Bestimmen Sie die Lösung $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_3'(t) = A\,y_3(t)$ und $y_3(0) = v_3$.

$$y_3(t) = \boxed{\mathrm{e}^{t}(v_3 + t v_2) = \mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\,\mathrm{e}^{t} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Dies ist eine reelle Hauptfunktion.}}$$

2

5D. Variation der Konstanten: Das inhomogene DGSystem $y'(t) = A\,y(t) - t\,\mathrm{e}^{(t^2/2)-2t} u_3$ mit $y(0) = 0$ besitzt eine Lösung der Form $y_p(t) = c(t)\,\mathrm{e}^{-2t} u_3$. Berechnen Sie:

$$y_p'(t) = \boxed{\big[c'(t) - 2c(t)\big]\,\mathrm{e}^{-2t} u_3 \qquad \text{Ableitung nach Produktregel.}}$$

$$A y_p(t) = \boxed{-2c(t)\,\mathrm{e}^{-2t} u_3 \qquad \text{Eigenvektor, } A\,u_3 = -2u_3.}$$

Einsetzen in unser inhomogenes DGSystem ergibt folgende Differentialgleichung für c:

$$c'(t) = \boxed{-t\,\mathrm{e}^{t^2/2} \qquad \text{mit Startwert } c(0) = 0.}$$

Die gesuchte Lösung zum Anfangswert $y(0) = 0$ ist daher:

$$c(t) = \boxed{-\,\mathrm{e}^{t^2/2} + 1 \qquad \text{Machen Sie die Probe!}}$$

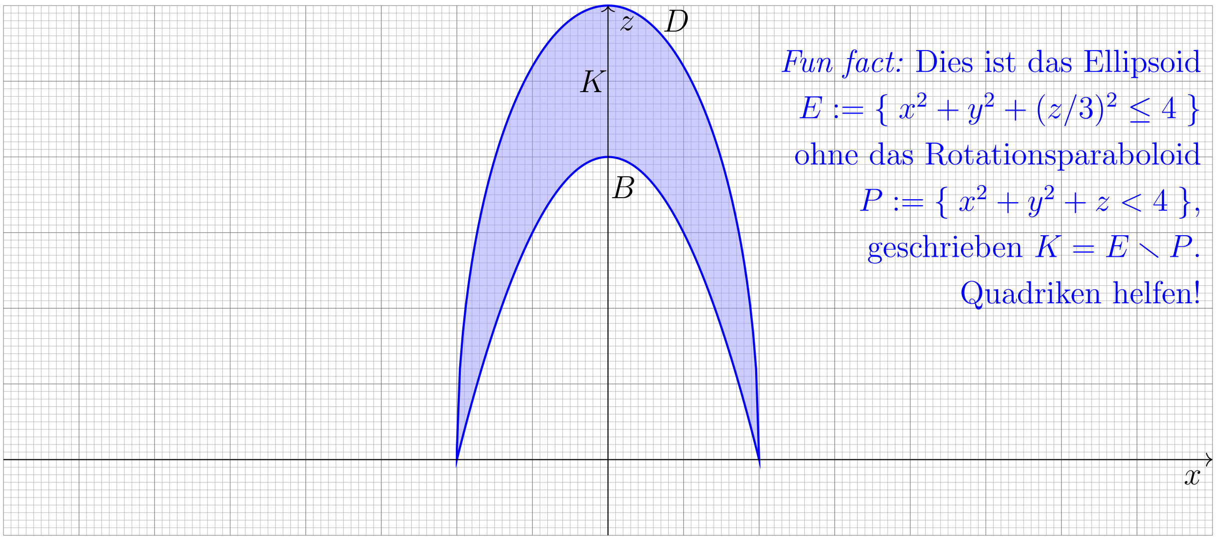
4

Aufgabe 6. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze (3+3+5+3 = 14 Punkte)*

Der Rotationskörper $K \subset \mathbb{R}^3$ und das Vektorfeld $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ seien gegeben durch

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 4 - x^2 - y^2 \le z \le 3\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right\} \quad \text{und} \quad f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{e}^{-y^2} \end{pmatrix}.$$

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$:



Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi\begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad 0 \le \rho \le \boxed{2}, \\ \boxed{4 - \rho^2} \le z \le \boxed{3\sqrt{4 - \rho^2}} \end{cases}$$

3

6B. Berechnen Sie mit dieser Parametrisierung das Volumen $\mathrm{vol}_3(K) \approx 25$ des Körpers K:

$\mathrm{vol}_3(K) = \displaystyle\int_K 1 \,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\rho=0}^{2} \int_{z=4-\rho^2}^{3\sqrt{4-\rho^2}} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho$ Transformationssatz anwenden

$= 2\pi \displaystyle\int_{\rho=0}^{2} 3\rho\sqrt{4-\rho^2} - \rho(4-\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$ Innere Integrale vereinfachen

$= 2\pi \Big[-(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}(4-\rho^2)^2 \Big]_{\rho=0}^{2}$ Stammfunktion

$= 2\pi \Big[8 - 4 \Big] = 8\pi \approx 25$ Einsetzen

Erläuterung: Beim Transformationssatz die Funktionaldeterminante nicht vergessen!
Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine.

3

6C. Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B mit $z = 4 - x^2 - y^2$ und dem Deckel D mit $z = 3\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. Wir parametrisieren B in Zylinderkoordinaten:

$$\Phi_B\begin{pmatrix}\rho\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\cos\varphi\\ \rho\sin\varphi\\ 4-\rho^2\end{pmatrix}, \qquad \frac{\partial\Phi_B}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi_B}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ -2\rho\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-\rho\sin\varphi\\ \rho\cos\varphi\\ 0\end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix}2\rho^2\cos\varphi\\ 2\rho^2\sin\varphi\\ \rho\end{pmatrix}}$$

Berechnen Sie mit Φ_B den Fluss des Vektorfeldes f durch B:

$$\int_{s\in B} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{\rho=0}^{2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2} \cdot \rho \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\rho \quad \text{Einsetzen und vereinfachen}$$

$$= \pi \int_{\rho=0}^{2} 2\rho\,\mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho = \pi\Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2}\Big]_{\rho=0}^{2} \quad \text{Stammfunktion}$$

$$= \pi\Big[1 - \mathrm{e}^{-4}\Big] \approx \pi \quad \text{Einsetzen}$$

Erläuterung: Das positive Vorzeichen des Integrals entspricht der Anschauung: Vektorfeld und Normalenvektor zeigt hier nach oben, also in den Körper K hinein. Das ist eine der beiden möglichen Orientierungen, für den Gaußschen Integralsatz in der nächsten Frage benötigen wir die umgekehrte Orientierung. Beide unterscheiden sich nur im Vorzeichen.

Folgern Sie den Fluss des Vektorfeldes f aus dem Körper K durch den Deckel D nach oben:

$$\int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \boxed{\int_{s\in B} f(s) \bullet \mathrm{d}S + \int_K \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}K = \pi\Big[1 - \mathrm{e}^{-4}\Big] \quad \text{Dank Gauß!}}$$

5

6D. Berechnen Sie den Fluss von $g = \operatorname{rot}(f)$ durch B nach oben als geeignetes Wegintegral:

$$\int_{s\in B} g(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{s\in B} \operatorname{rot} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{\partial B} f(s) \bullet \mathrm{d}s \quad \text{Dank Stokes!}$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} f(\Phi_B(2,\varphi)) \bullet \partial_\varphi \Phi_B(2,\varphi)\,\mathrm{d}\varphi \quad \text{Parametrisieren, } \rho = 2$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} 4\,\mathrm{d}\varphi = 8\pi \approx 25 \quad \text{Einsetzen und ausrechnen}$$

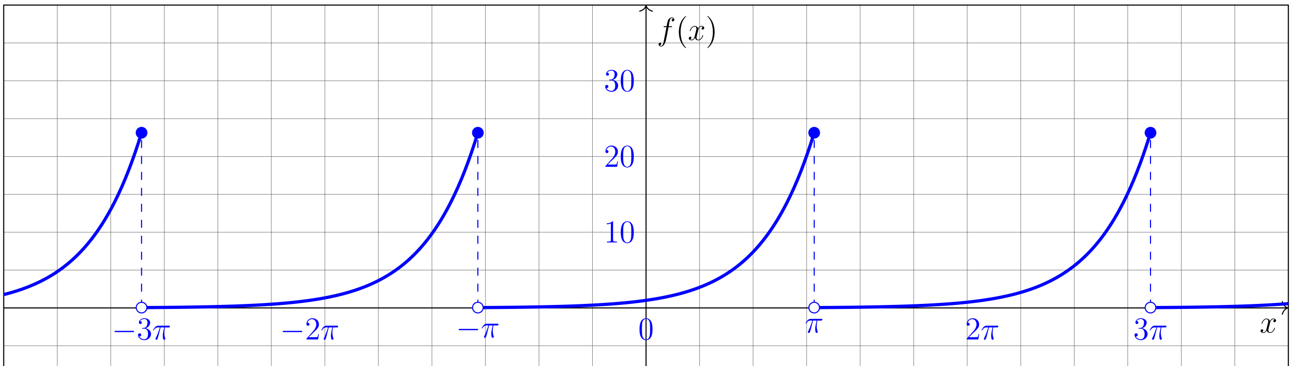
Erläuterung: Alternativ können Sie explizit das Vektorfeld $g = \operatorname{rot} f$ und das Flussintegral $\int_{s\in B} g(s) \bullet \mathrm{d}S$ berechnen. Dieser Rechenweg ist zwar etwas länger, hier aber ebenso möglich. Übung: Probieren und vergleichen Sie beide! Das Ergebnis ist dasselbe, so wie es sein muss.

3

Aufgabe 7. *Fourier–Reihen (2+4+2+2 = 10 Punkte)*

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x) = \mathrm{e}^x$ für $-\pi < x \le \pi$.

7A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



Erläuterung: Die Funktion f ist nicht stetig; sie hat Sprungstellen in $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \dots$. Sie erfüllt in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ die Dirichlet–Bedingung, ist aber nicht sprungnormiert. Die nächste Frage klärt die Grenzwerte der Fourier–Reihe dank des Satzes von Dirichlet.

Bestimmen Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f im Punkt $x = \pi$:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{2}}$$

Dank Dirichlet-Kriterium! 2

7B. Bestimmen Sie die Koeffizienten c_k der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{Definition der komplexen Fourier–Koeffizienten}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x=-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{Einsetzen und vereinfachen: Exponentialgesetz}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{1-\mathrm{i}k} \, \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i}k)x} \right]_{x=-\pi}^{\pi} \qquad \text{Stammfunktion ausschreiben}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \frac{1+\mathrm{i}k}{1+k^2} \left[\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi} \right] (-1)^k \qquad \text{Einsetzen und vereinfachen}$$

Erläuterung: Die Berechnung dieser Integrale erfordert die übliche Sorgfalt und Routine.

Das Ergebnis wurde soweit möglich vereinfacht, sodass der Nenner reell ist. Insbesondere können Sie aus c_k leicht die reellen Koeffizienten $a_k = c_k + c_{-k}$ und $b_k = \mathrm{i}(c_k - c_{-k})$ ablesen. Diese werden diesmal sogar explizit abgefragt, zwecks Übung und weiterer Nutzung.

3

Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \frac{(-1)^k}{\pi(1+k^2)}\big[\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\big], \qquad b_k = \boxed{\mathrm{i}(c_k - c_{-k}) = \frac{(-1)^{k+1}\,k}{\pi(1+k^2)}\big[\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\big]}$$

1

7C. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe von f an der Stelle $x = \pi$ den exakten Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{17} + \frac{1}{26} + \frac{1}{37} + \dots \in [1.0, 1.1]$.

$$\frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{2} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(-1)^k$$ Auswerten an der Stelle $x = \pi$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+k^2}\right]\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)$$ Einsetzen der berechneten Koeffizienten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\pi}{2}\frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}} - \frac{1}{2} = 1.076674\ldots$$ Auflösen nach der gesuchten Reihe

Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet, denn im Punkt $x = \pi$ existieren die einseitigen Grenzwerte $f(x\pm) = \mathrm{e}^{\mp\pi}$ und auch die Ableitungen $f'(x\pm) = \mathrm{e}^{\mp\pi}$. Die Fourier–Reihe $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert daher im Punkt $x = \pi$ für $n \to \infty$ gegen den Mittelwert $(f(x-) + f(x+))/2$. Die so erhaltene Gleichung lösen wir dann sorgfältig auf.

Alternativ können Sie die reelle Fourier–Reihe nutzen, das ist vielleicht etwas einfacher. Insbesondere benötigen Sie hierzu nur die Koeffizienten a_k, die oben angegeben wurden.

2

7D. Bestimmen Sie die komplexe Fourier–Reihe $f'(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ der Ableitung f' von f.

$$\gamma_k = c_k = \frac{1}{2\pi}\frac{1+\mathrm{i}k}{1+k^2}\big[\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\big](-1)^k$$ wie oben berechnet, da $f' = f$ auf $]-\pi, \pi[$.

Erläuterung: Es gilt $f' = f$ außer in den Sprungstellen $x = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi$, also haben f und f' dieselbe Fourier–Reihe! Die überaus bequeme und daher so beliebte Ableitungsformel

$$f(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \quad\Longrightarrow\quad f'(x) \sim \sum_{k\in\mathbb{Z}} \mathrm{i}kc_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

gilt hier offensichtlich nicht. Der zugehörige Satz lässt sich nur anwenden, wenn f absolut stetig ist, also stetig und fast überall differenzierbar mit $f(x) = f(0) + \int_{t=0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das ist hier offensichtlich nicht der Fall: Betrachten Sie aufmerksam die obige Skizze! Sie müssen also – wie immer – bei der Anwendung eines Satzes / einer Rechenregel die zugehörigen Voraussetzungen beachten. Bitte lesen Sie die Gebrauchsanweisung!

2

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.