Übungsblatt 2: Integralsätze und Potentiale

Für die Prüfungsvorbereitung am 20.02.2018

1 Ist das Eis groß genug? Sei $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2\sqrt{x^2+y^2} - 2 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$.

(a) Stellen Sie für $\mathrm{vol}_3(E)$ ein Integral über den karthesischen Koordinaten auf.

(b) Es gilt $E = K \cup W$ mit $K = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\right\}$ und $W = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2\sqrt{x^2+y^2} - 2 \le z \le 0\right\}$. Bestimmen Sie $\mathrm{vol}_3(K)$, $\mathrm{vol}_3(W)$ und damit $\mathrm{vol}_3(E)$. Benutzen Sie dazu eine geschickte Wahl des Koordinatensystems.

2 Gefahrenpotential Untersuchen Sie für die folgenden Vektorfelder jeweils, ob sie ein Potential besitzen, und geben Sie gegebenenfalls eines an.

(a) $f_1(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y,x)$ auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$.

(b) $f_2(x,y) = \left(\frac{y}{(2-x)^2} + y^2, \frac{1}{2-x} + 2xy\right)$ auf $(\mathbb{R}\setminus\{2\})\times\mathbb{R}$.

(c) $f_3(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x,y,z)$ auf $\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

(d) $f_4(x,y,z) = (z\mathrm{e}^x(\sin(xy) + y\cos(xy)),\ zx\mathrm{e}^x\cos(xy),\ \mathrm{e}^x\sin(xy))$ auf $\mathbb{R}^3$.

3 Der grüne Klassiker Sei $\gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (a\cdot\cos(t), b\cdot\sin(t))$ mit $a,b > 0$ und $f(x,y) = (-2y,x)$ ein Vektorfeld.

(a) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s)\cdot \mathrm{d}s$.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der von γ berandeten Fläche F.

(c) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma g(s)\cdot \mathrm{d}s$ zum Vektorfeld $g(x,y) = (x\cdot\sin(x) - 4y, y^2 + x)$.

4 (Nicht) Ab durch die Mitte! Sei $G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 3\right\}$ und $f(x,y,z) = (4x, -2y^2, z^2)$ ein Vektorfeld. Verifizieren Sie daran den Satz von Gauß:

(a) Bestimmen Sie das Integral $\int_G \mathrm{div}\, f\ \mathrm{d}(x,y,z)$.

(b) Bestimmen Sie das Integral $\int_{\partial G} f\cdot \mathrm{d}S$, wobei $\mathrm{d}S = n(s)\cdot|\mathrm{d}S|$ mit nach außen zeigendem Normalenvektor $n(s)$.

5 Ein Eis für Stokes Sei S der Rand der Waffel W aus Aufgabe 1 (ohne Deckel). Berechnen Sie zum Vektorfeld $f(x,y,z) = (z-y, x+z, -x-y)$ die Integrale $\int_S \mathrm{rot}(f)\cdot\mathrm{d}S$ und $\int_{s\in\Gamma} f(s)\cdot\mathrm{d}s$ mit positiv orientierter Randkurve $\Gamma = \partial S$. Was erwarten Sie für die Ergebnisse?