Übungsblatt 1: Fourier und Laplace

Für die Prüfungsvorbereitung am 19.02.2018

1 Reihenweise Probleme Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π-periodisch mit $f(x) = \pi^2 - x^2$ für $x \in [-\pi, \pi[$.

(a) Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-3\pi, 3\pi]$.

(b) Bestimmen Sie reelle und komplexe Fourier-Koeffizienten der Funktion f. An welchen Stellen konvergiert die Fourier-Reihe von f gegen f?

(c) Bestimmen Sie jeweils durch Auswerten an einer geschickten Stelle die Werte der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ und $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

(d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}$.

(e) Bestimmen Sie nun auf möglichst einfache Weise die reellen Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -2x$ für $x \in [-\pi, \pi[$ und berechnen Sie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

2 Um die (Drei-)Ecke gedacht Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & x \in]-1, 1[\\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für die Fourier-Transformierte $\hat{f}$ von f gilt $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{\xi}{2}\right)}{\left(\frac{\xi}{2}\right)^2}$.

(b) Bestimmen Sie so eine Funktion g, sodass $\hat{g}(\xi) = \frac{\sin^2(\xi)}{\xi^2}$.

(c) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4(t)}{t^4} \mathrm{d}t$.

3 Weniger ist mehr

(a) Bestimmen Sie die Laplace-Transformierte von $\frac{x}{2} \sin(x)$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' + y = \cos(x)$ mit der Anfangsbedingung $y(0) = y'(0) = 1$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

4 Viel hilft viel

(a) Bestimmen Sie explizit (d.h. mit der Integralformel) die Laplace-Transformierte von $x\mathrm{e}^{x}$.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung $y'' - 4y' + 3y = 2\mathrm{e}^{x}$ mit Anfangsbedingungen $y(0) = 1, y'(0) = 0$ mit Hilfe der Laplace-Transformation.

5 Transformers: Revenge of the Eigenvector Zeigen Sie, dass $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ein Eigenvektor der Laplace-Transformation zum Eigenwert $\sqrt{\pi}$ ist.