

Übungsblatt 4: Differentialgleichungssysteme

Für die Prüfungsvorbereitung am 22.02.2018

1 There is no spoon Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -11 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & -8 & -4 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie Av_1 und Av_2 . Was können Sie bisher über die Eigenwerte von A sagen?
- (b) A hat einen dreifachen und einen einfachen Eigenwert. Bestimmen Sie die restlichen Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren v_3, v_4 von A .
- (c) Bestimmen Sie die Determinante von A sowie die Matrix ${}_{\mathcal{B}}A_{\mathcal{B}}$ für die Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.
- (d) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem und die Fundamentalmatrix des Differentialgleichungssystems $y' = Ay$.

- (e) Lösen Sie für $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sowie $y(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ das Differentialgleichungssystem
- $$y' = Ay + b.$$

2 Systematische Prüfungsvorbereitung Gegeben sei das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des DGS.
- (b) Sei $y(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, \in \mathbb{R}$. Können a, b und c so gewählt werden, dass die Lösung des DGS periodisch ist?
- (c) Können a, b und c auch so gewählt werden, dass $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$?

3 Noch einmal mit Gefühl Lösen Sie das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und Anfangsbedingungen $y(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ für $a, b \in \mathbb{R}$.