Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/10	/14	/12	/12	/72

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer C^∞–glatten 2π–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Begründete Antwort:

$\overline{2}$

2B. Eindeutigkeit 1: Zu lösen sei für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Gleichung $y'(x) = -2\sqrt{y(x)}$ mit $y(1) = 0$. Sie kennen die Lösung $y(x) = (1-x)^2$ für $x \leq 1$ und $y(x) = 0$ für $x \geq 1$. Existieren weitere?

Begründete Antwort:

$\overline{2}$

2C. Eindeutigkeit 2: Zu lösen sei für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ die Gleichung $y'(x) = -2\sqrt{y(x)}$ mit $y(0) = 1$. Sie kennen die Lösung $y(x) = (1-x)^2$ für $x \leq 1$ und $y(x) = 0$ für $x \geq 1$. Existieren weitere?

Begründete Antwort:

$\overline{2}$

2D. Hauptvektoren 1: Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit Hauptvektorketten $0 \xleftarrow{A-2} u_1 \xleftarrow{A-2} u_2$ und $0 \xleftarrow{A-3} v_1 \xleftarrow{A-3} v_2 \xleftarrow{A-3} v_3$?

Begründete Antwort:

/ 2

2E. Hauptvektoren 2: Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit Hauptvektorketten $0 \xleftarrow{A-2} u_1 \xleftarrow{A-2} u_2$ und $0 \xleftarrow{A-3} v_1 \xleftarrow{A-3} v_2$?

Begründete Antwort:

/ 2

2F. Definiert jede diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $p : \mathbb{Z} \to [0, 1]$ einen Erwartungswert?

Begründete Antwort:

/ 2

Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+3+4 = 11 Punkte)*

3A. Sie haben fünf Münzen, vier davon sind fair (F), die fünfte jedoch ist unfair (U) und zeigt Zahl bei jedem Wurf. Sie wählen zufällig eine dieser Münzen und werfen diese dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werfen Sie ein Tripel $T =$ „dreimal Zahl"?

$\mathbf{P}(T) =$

2

Angenommen, Sie werfen tatsächlich das Tripel T. Mit welcher Wkt ist die Münze unfair?

2

3B. Aus den Losen $\{1, 2, \ldots, 500\}$ ziehen Sie mit Zurücklegen 20 Mal zufällig unabhängig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p wird mindestens ein Los mehrfach gezogen? (Ergebnis in Prozent)

3

3C. Ein Experiment mit Trefferwkt 20% wird 1 000 000 Mal unabhängig wiederholt.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl X der Treffer größer als 200 600?

4

Aufgabe 4. *PDE und Charakteristikmethode* (*3+4+3 = 10 Punkte*)

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ die partielle Differentialgleichung

$\partial_t u(t,x) + 3x\,\partial_x u(t,x) = -u(t,x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$,

$u(0,x) = \cos(x)$ Startwerte für $t = 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

4A. Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem an:

$t'(s) = \quad 1,$ $\qquad t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{}\,,$ $\qquad x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{}\,,$ $\qquad z(0) = \boxed{}\,.$

3

4B. Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik; für diese gilt $u(t(s), x(s)) = z(s)$:

$t(s) = s,\quad x(s) = \boxed{}\,,\quad z(s) = \boxed{}\,.$

Vorgegeben sei nun ein Punkt $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$. Zu welchen Startwerten (t_0, x_0, z_0) läuft die Charakteristik über (t_1, x_1), das heißt $(t(s), x(s)) = (t_1, x_1)$ für ein $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$?

$t_0 = 0,\quad x_0 = \boxed{}\,,\quad z_0 = \boxed{}\,.$

4

4C. Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$u(t,x) = \boxed{}$

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) = \boxed{}$

$3x\,\partial_x u(t,x) = \boxed{}$

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme (2+5+2+3+2 = 14 Punkte)*

Zu lösen ist ein Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben ist hierzu die Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie die Vektoren} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$ $\boxed{}$ zum Eigenwert $\lambda_1 =$ $\boxed{}$

2

5B. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor dritter Stufe.

Bestimmen Sie den dreifachen Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda =$ $\boxed{}$

sowie die zugehörige Matrix: $A - \lambda =$ $\boxed{}$

Schreiben Sie damit die Hauptvektorkette explizit aus:

$v_4 = \boxed{} \xmapsto{A-\lambda} v_3 = \boxed{} \xmapsto{A-\lambda} v_2 = \boxed{}$

5

5C. Folgern Sie die Determinante $\det A =$

und schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix bezüglich der obigen Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

${}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} =$

2

5D. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_1'(t) = A\, y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$.

$y_1(t) =$

Bestimmen Sie die Lösung $y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_4'(t) = A\, y_4(t)$ und $y_4(0) = v_4$.

$y_4(t) =$

3

5E. Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y'(t) = A\, y(t)$ die Lösung zu einem zufällig gewählten Startpunkt $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^4$ (mit stetig verteilter Wkt). Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Begründete Antwort:

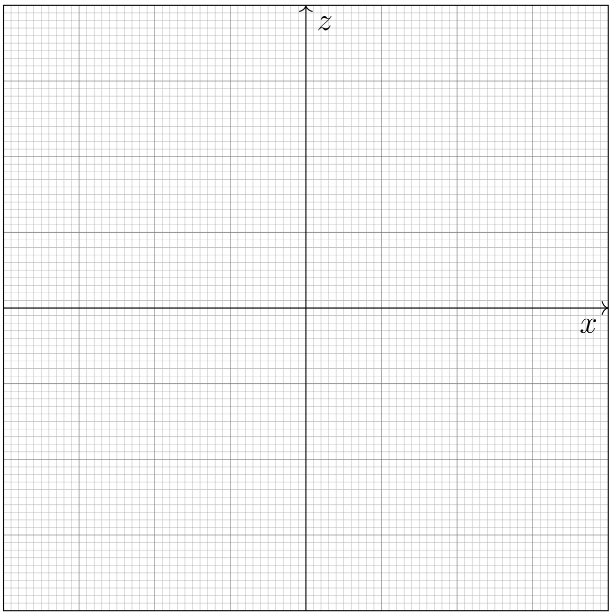
2

Aufgabe 6. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*1+2+3+3+3 = 12 Punkte*)

Wir untersuchen den Rotationskörper

$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 - x^2/4 - y^2/4 \} \cup \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \ge z \ge x^2 + y^2 - 4 \}$$

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$.



Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B und dem Deckel D, explizit in Koordinaten:

$$B = \{ (x,y,z) \in K \mid 0 \ge z = x^2 + y^2 - 4 \},$$
$$D = \{ (x,y,z) \in K \mid 0 \le z = 1 - x^2/4 - y^2/4 \}.$$

1

6B. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{\qquad\qquad} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \boxed{\qquad\qquad} \le z \le \boxed{\qquad\qquad} \end{cases}$$

2

6C. Berechnen Sie die Quellstärke des Vektorfeldes $f(x,y,z) = \big(0, 0, z\sqrt{x^2+y^2}\big)$ auf K:

$$\int_K \operatorname{div} f(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z) =$$

3

6D. Wir parametrisieren auch den Deckel D in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_D \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 1-\rho^2/4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi, \rho \text{ wie oben}$$

Berechnen Sie damit den Normalenvektor des Deckels D:

$$\frac{\partial \Phi_D}{\partial \rho} \times \frac{\partial \Phi_D}{\partial \varphi} = \boxed{} \times \boxed{} = \boxed{}$$

___ 3

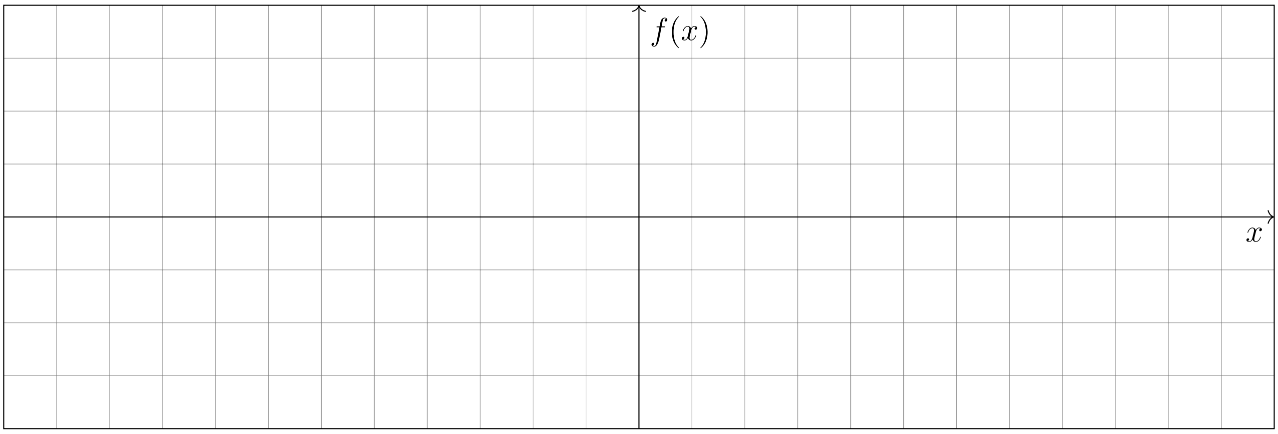
6E. Berechnen Sie den Fluss von $f(x,y,z) = \big(0, 0, z\sqrt{x^2+y^2}\big)$ durch den Deckel D nach außen:

$$\int_{s \in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

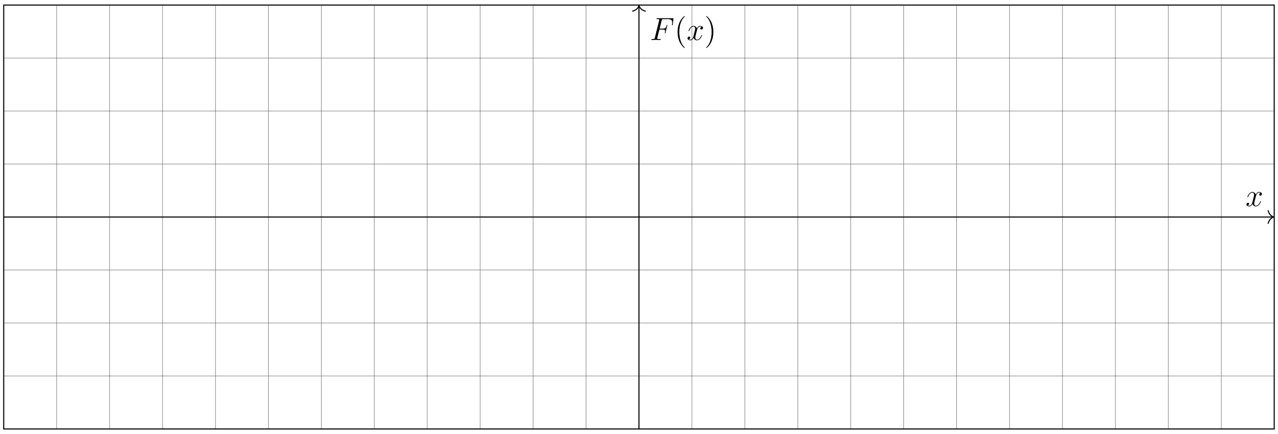
___ 3

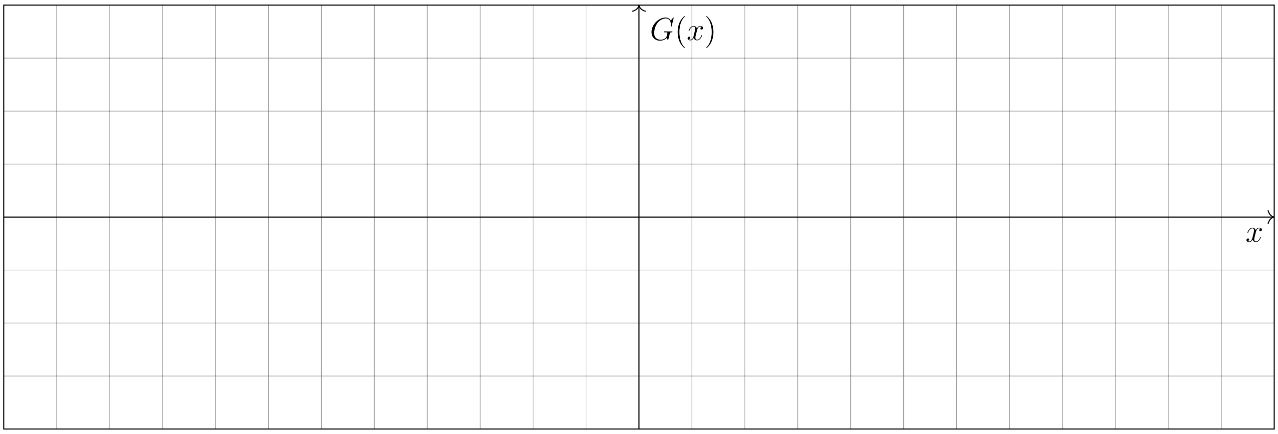
Aufgabe 7. *Fourier–Reihen (3+2+4+3 = 12 Punkte)*

7A. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch und gerade mit $f(x) = 2$ für $0 \le x < \pi/3$ und $f(x) = -1$ für $\pi/3 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



Skizzieren Sie ebenso die Funktion F mit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ sowie G mit $G(x) = \int_{t=0}^{x} F(t)\,\mathrm{d}t$:





3

7B. Finden Sie die Grenzwerte der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f in $x \in \{\pi, \pi/3\}$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\pi/3) = \boxed{}$ 2

7C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$\overline{4}$

7D. Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$

$A_k =$

$B_k =$

$\overline{3}$