Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/10	/14	/12	/12	/72

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Es geht hier vorrangig um die Beherrschung der grundlegenden Begriffe und Techniken. Alle Rechnungen, insbesondere Integrale, sind ganz bewusst noch einfach gehalten. In der späteren Abschlussklausur (Modulprüfung) sind die Rechnungen meist anspruchsvoller.

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer C^∞–glatten 2π–periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$?

Begründete Antwort:

Ja. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^k = \exp(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}) = f(x)$ ist 2π–periodisch und C^∞–glatt.

Erläuterung: Schnelles Abklingen der Fourier–Koeffizienten entspricht Glattheit der Funktion. Sie kennen hierzu das L^2–Kriterium $\sum |c_k|^2 < \infty$ oder das C^n–Kriterium $\sum |c_k| k^n < \infty$. In unserem Beispiel klingen die Koeffzienten extrem schnell ab, so dass das C^n–Kriterium für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ erfüllt ist: Die so dargestellte Funktion f ist also tatsächlich C^∞–glatt. Besser noch können Sie die Reihe sogar explizit ausrechnen: Sie erkennen hier die Exponentialreihe!

2

2B. Eindeutigkeit 1: Zu lösen sei für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ die Gleichung $y'(x) = -2\sqrt{y(x)}$ mit $y(1) = 0$. Sie kennen die Lösung $y(x) = (1-x)^2$ für $x \le 1$ und $y(x) = 0$ für $x \ge 1$. Existieren weitere?

Begründete Antwort:

Ja. Konkretes Beispiel: $y(x) = 0$.

Erläuterung: Sie kennen dieses Beispiel aus der Vorlesung (Wasseruhr oder Toricellis Eimer). Der Eindeutigkeitssatz ist hier nicht anwendbar, denn die rechte Seite $f(x,y) = -2\sqrt{y}$ ist nicht stetig differenzierbar nach y: In $y = 0$ erhalten wir ∞, also eine senkrechte Tangente.

2

2C. Eindeutigkeit 2: Zu lösen sei für $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ die Gleichung $y'(x) = -2\sqrt{y(x)}$ mit $y(0) = 1$. Sie kennen die Lösung $y(x) = (1-x)^2$ für $x \le 1$ und $y(x) = 0$ für $x \ge 1$. Existieren weitere?

Begründete Antwort:

Nein. Für $y > 0$ ist der Eindeutigkeitssatz anwendbar, und aus $y(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$ folgt $y(x) = 0$ für alle $x \ge x_0$, denn es muss zugleich $y(x) \ge 0$ und $y'(x) \le 0$ gelten.

Erläuterung: Sie kennen dieses Beispiel aus der Vorlesung (Wasseruhr oder Toricellis Eimer). Der Eindeutigkeitssatz ist für $y > 0$ anwendbar, denn die rechte Seite $f(x,y) = -2\sqrt{y}$ ist dann stetig differenzierbar nach y. Nur auf der x–Achse müssen wir genauer hinschauen.

2

2D. Hauptvektoren 1: Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit Hauptvektorketten $0 \xleftarrow{A-2} u_1 \xleftarrow{A-2} u_2$ und $0 \xleftarrow{A-3} v_1 \xleftarrow{A-3} v_2 \xleftarrow{A-3} v_3$?

Begründete Antwort:

Nein. Dann wären die fünf Vektoren $(u_1, u_2, v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig über $\mathbb{C}$, was der Dimension $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^4) = 4$ widerspricht. Der linearen Algebra sei Dank!

Erläuterung: Die Vektoren einer Hauptvektorkette sind untereinander linear unabhängig, hier (u_1, u_2) und (v_1, v_2, v_3). Haupträume zu verschiedenen Eigenwerten haben keine Elemente gemeinsam (bis auf den Nullvektor), daher ist die gesamte Familie $(u_1, u_2, v_1, v_2, v_3)$ linear unabhängig.

$\overline{}$ 2

2E. Hauptvektoren 2: Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ mit Hauptvektorketten $0 \xleftarrow{A-2} u_1 \xleftarrow{A-2} u_2$ und $0 \xleftarrow{A-3} v_1 \xleftarrow{A-3} v_2$?

Begründete Antwort:

Ja. Konkretes Beispiel ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Erläuterung: In der Basis (u_1, u_2, v_1, v_2) sieht jede Lösung genau so aus! Der Satz von der Jordan–Basis besagt ganz allgemein: Zu $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert eine Basis $\mathscr{B}$ des $\mathbb{C}^n$ aus Hauptvektorketten. Bezüglich dieser Basis $\mathscr{B}$ besteht $v \mapsto Av$ aus Jordan–Blöcken. Die hier gefragte Situation illustriert dies mit einem konkreten und sehr einfachen Beispiel.

$\overline{}$ 2

2F. Definiert jede diskrete Wahrscheinlichkeitsverteilung $p : \mathbb{Z} \to [0, 1]$ einen Erwartungswert?

Begründete Antwort:

Nein. Konkretes Gegenbeispiel: $p[(-2)^k] = 2^{-k}$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ und $p(n) = 0$ sonst.

Erläuterung: Es gilt $p(n) \ge 0$ und $\sum_{n\in\mathbb{Z}} p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} p[(-2)^k] = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1$. Der Erwartungswert ergibt sich aus der Reihe $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n\, p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} (-2)^k p[(-2)^k] = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$, aber diese Reihe $(-1) + (+1) + (-1) + (+1) + (-1) + \dots$ divergiert!

Ein weiteres beliebtes Gegenbeispiel ist $p(k) = c/k^2$ für $k = 1, 2, 3, \dots$ und $p(n) = 0$ sonst. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ konvergiert, und Sie kennen sogar den Grenzwert $\pi^2/6$. Für $c = 6/\pi^2$ gilt $p(k) \ge 0$ und $\sum_{k\in\mathbb{Z}} p(k) = 1$. Der Erwartungswert ergibt sich aus der Reihe $\sum_{k\in\mathbb{Z}} k\, p(k)$, aber die harmonische Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergiert!

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+3+4 = 11 Punkte)*

3A. Sie haben fünf Münzen, vier davon sind fair (F), die fünfte jedoch ist unfair (U) und zeigt Zahl bei jedem Wurf. Sie wählen zufällig eine dieser Münzen und werfen diese dreimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werfen Sie ein Tripel $T =$ „dreimal Zahl“?

$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(F) \cdot \mathbf{P}(T|F) + \mathbf{P}(U) \cdot \mathbf{P}(T|U)$ Totale Wahrscheinlichkeit

$= \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5} \cdot 1 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$ Einsetzen und ausrechnen!

Erläuterung: Das ist die Formel der totalen Wahrscheinlichkeit. Solche Aufgaben sind leicht, wenn Sie die Notation und die Rechenregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung beherrschen.

2

Angenommen, Sie werfen tatsächlich das Tripel T. Mit welcher Wkt ist die Münze unfair?

$\mathbf{P}(U|T) = \mathbf{P}(U) \cdot \mathbf{P}(T|U) \Big/ \mathbf{P}(T)$ Formel von Bayes

$= \frac{1}{5} \cdot 1 \Big/ \frac{3}{10} = \frac{2}{3}$ Einsetzen und ausrechnen!

Erläuterung: Das ist die Formel von Bayes (oder Dreisatz). Solche Aufgaben sind leicht, wenn Sie die Notation und die Rechenregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung beherrschen.

2

3B. Aus den Losen $\{1, 2, \dots, 500\}$ ziehen Sie mit Zurücklegen 20 Mal zufällig unabhängig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p wird mindestens ein Los mehrfach gezogen? (Ergebnis in Prozent)

Exakt $1 - p = \left(1 - \frac{0}{500}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{500}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{500}\right) \cdots \left(1 - \frac{19}{500}\right)$

Näherung $1 - p \lessapprox \exp\left(-\frac{19 \cdot 20}{2 \cdot 500}\right) = \exp\left(-\frac{380}{1000}\right) \approx 0.684 \approx 0.68 = 68\%$

Gegenwkt $p \gtrapprox 32\%$ (Ohne Interpolation erhalten Sie 67% bzw. 33%.)

Erläuterung: Sie kennen Rechnung und Näherung vom Geburtstagsparadox oder allgemein von Kollisionswahrscheinlichkeiten. Die exakte Rechnung ergibt hier $1 - p = 0.68042\dots$. Die obige Rechnung ist also erwartungsgemäß recht gut. Die Richtung der Abweichung wird durch die Ungleichung richtig wiedergegeben; diese Feinheit war in der Klausur nicht gefragt.

Wichtig war hier, nicht das Ergebnis mit seiner Gegenwahrscheinlichkeit zu verwechseln.

3

3C. Ein Experiment mit Trefferwkt 20% wird 1 000 000 Mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Anzahl X der Treffer größer als 200 600?

Erwartung $\mu(X) = 1\,000\,000 \cdot 0.2 = 200\,000$

Streuung $\sigma(X) = \sqrt{1\,000\,000 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{160\,000} = 400$

Chebychev $\mathbf{P}(X > 200600) \le \dfrac{1}{1+\alpha^2}$ mit $\alpha = (200600 - \mu)/\sigma = 1.5$

$$\lessapprox 0.31 = 31\%$$

LGS/ZGS $\mathbf{P}(X > 200600) \approx \displaystyle\int_\alpha^\infty \varphi(t)\,dt$ mit $\alpha = (200600 - \mu)/\sigma = 1.5$

$$\approx 0.5000 - 0.43319 = 0.06681 \approx 7\%$$

Achtung: Die Abschlussklausur fragt meist nach der Wahrscheinlichkeit bis auf 0.01 genau. Dazu ist Chebychev viel zu grob, nur der lokale / zentrale Grenzwertsatz hilft dann weiter.

Wir hatten für diese Klausur nur die ersten beiden Kapitel der Wahrscheinlichkeitsrechnung vereinbart: Die Chebychev–Ungleichungen sind zwar nur eine grobe erste Abschätzung, dafür aber sehr einfach anzuwenden, und schon am Anfang zugänglich.

Wer aus den Folgekapiteln schon mehr wusste, konnte dies hier ebenso anwenden: Exakt folgt X der Binomialverteilung $B(1000000, 0.2)$. Eine gute Näherung hierfür ist die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$. Den Wert des Integrals entnehmen Sie der Tabelle, s. Seite 2.

$\overline{}$ 4

Aufgabe 4. *PDE und Charakteristikmethode (3+4+3 = 10 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t u(t,x) + 3x\,\partial_x u(t,x) = -u(t,x) \qquad \text{für alle } t > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R},$$
$$u(0,x) = \cos(x) \qquad \text{Startwerte für } t = 0 \text{ und alle } x \in \mathbb{R}.$$

4A. Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem an:

$t'(s) = 1,$ $\quad t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{3x(s)},$ $\quad x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{-z(s)},$ $\quad z(0) = \boxed{\cos(x_0)}.$

3

4B. Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik; für diese gilt $u(t(s), x(s)) = z(s)$:

$t(s) = s,$ $\quad x(s) = \boxed{x_0\,\mathrm{e}^{3s}},$ $\quad z(s) = \boxed{\mathrm{e}^{-s}\cos(x_0)}.$

Vorgegeben sei nun ein Punkt $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}$. Zu welchen Startwerten (t_0, x_0, z_0) läuft die Charakteristik über (t_1, x_1), das heißt $(t(s), x(s)) = (t_1, x_1)$ für ein $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$?

$t_0 = 0,$ $\quad x_0 = \boxed{x_1\,\mathrm{e}^{-3t_1}},$ $\quad z_0 = \boxed{\cos(x_0) = \cos(x_1\,\mathrm{e}^{-3t_1})}.$

4

4C. Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$u(t,x) = \boxed{\mathrm{e}^{-t}\cos(x\,\mathrm{e}^{-3t})}$ Startwerte transportiert längs Charakteristiken

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) = \boxed{-\,\mathrm{e}^{-t}\cos(x\,\mathrm{e}^{-3t}) + 3x\,\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(x\,\mathrm{e}^{-3t})}$ nach Produkt- und Kettenregel

$3x\,\partial_x u(t,x) = \boxed{-3x\,\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(x\,\mathrm{e}^{-3t})}$ Probe: $u(t,x)$ erfüllt die PDE!

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme (2+5+2+3+2 = 14 Punkte)*

Zu lösen ist ein Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben ist hierzu die Systemmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie die Vektoren} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 2\mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$ $u_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Dank Probe! zum Eigenwert $\lambda_1 =$ -1

2

5B. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor dritter Stufe.

Bestimmen Sie den dreifachen Eigenwert $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda =$ -3 Dank Spur!

sowie die zugehörige Matrix: $A - \lambda =$ $A + 3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Schreiben Sie damit die Hauptvektorkette explizit aus:

$$v_4 = u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \xmapsto{A-\lambda} v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \xmapsto{A-\lambda} v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5

5C. Folgern Sie die Determinante $\det A =$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = (-1) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 27$

und schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix bezüglich der obigen Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Sie erhalten Jordan–Blöcke!

2

5D. Bestimmen Sie die Lösung $y_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_1'(t) = A\,y_1(t)$ und $y_1(0) = v_1$.

$$y_1(t) = \mathrm{e}^{-t} v_1 = \mathrm{e}^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine Eigenfunktion.

Bestimmen Sie die Lösung $y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_4'(t) = A\,y_4(t)$ und $y_4(0) = v_4$.

$$y_4(t) = \mathrm{e}^{-3t} \left[v_4 + t v_3 + \frac{t^2}{2} v_2 \right]$$

Dies ist eine Hauptfunktion.

3

5E. Sei $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y'(t) = A\,y(t)$ die Lösung zu einem zufällig gewählten Startpunkt $y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^4$ (mit stetig verteilter Wkt). Wie verhält sich diese Lösung für $t \to \infty$?

Begründete Antwort:

Für jeden Startpunkt $y_0 \in \mathbb{R}^n$ und $t \to \infty$ gilt $|y(t)| \to 0$, denn alle Eigenwerte sind negativ (Stabilitätskriterium).

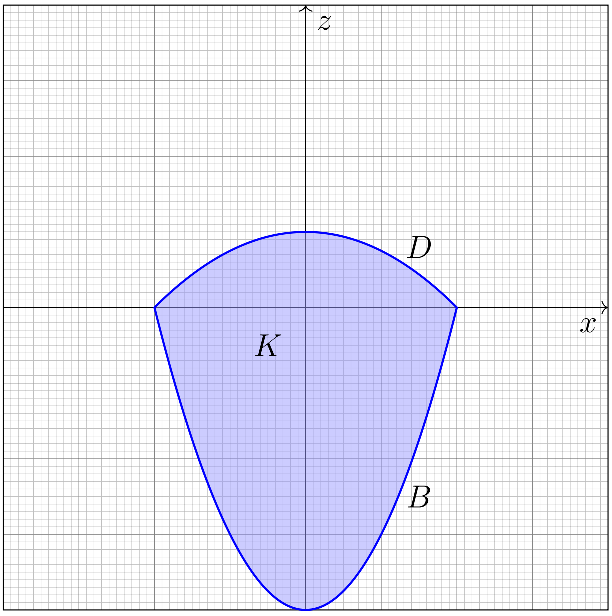
Erläuterung: Asymtotische Stabilität liegt vor, wenn alle Eigenwerte negativen Realteil haben. Die Fundamentallösungen, also wie oben Eigenfunktionen und falls nötig Hauptfunktionen, sind dann exponentiell gedämpft, jede Lösung konvergiert somit gegen Null. Dasselbe gilt dann für jede beliebige Lösung, denn diese ist Linearkombination der Fundamentallösungen.

2

Aufgabe 6. *Dreidimensionale Integrale und Integralsätze* (*1+2+3+3+3 = 12 Punkte*)

Wir untersuchen den Rotationskörper
$$K = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le z \le 1 - x^2/4 - y^2/4 \}$$
$$\cup \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \ge z \ge x^2 + y^2 - 4 \}$$

6A. Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der x–z–Ebene, also mit der Ebene $y = 0$.



Die Randfläche ∂K besteht aus dem Boden B und dem Deckel D, explizit in Koordinaten:
$$B = \{ (x,y,z) \in K \mid 0 \ge z = x^2 + y^2 - 4 \},$$
$$D = \{ (x,y,z) \in K \mid 0 \le z = 1 - x^2/4 - y^2/4 \}.$$ 1

6B. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{2} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \\ \boxed{\rho^2 - 4} \le z \le \boxed{1 - \rho^2/4} \end{cases}$$ 2

6C. Berechnen Sie die Quellstärke des Vektorfeldes $f(x,y,z) = \big(0, 0, z\sqrt{x^2+y^2}\big)$ auf K:

$$\int_K \operatorname{div} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\rho=0}^{2} \int_{z=\rho^2-4}^{1-\rho^2/4} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \rho \cdot \rho \,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\rho \qquad \text{Einsetzen}$$

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{2} (5 - 5\rho^2/4)\rho^2\,\mathrm{d}\rho = 2\pi \int_{\rho=0}^{2} 5\rho^2 - 5\rho^4/4\,\mathrm{d}\rho \qquad \text{Vereinfachen}$$

$$= 2\pi \Big[\frac{5}{3}\rho^3 - \frac{1}{4}\rho^5\Big]_{\rho=0}^{2} = 2\pi\Big[\frac{40}{3} - 8\Big] = \frac{32\pi}{3} \approx 33.5 \qquad \text{Ausrechnen}$$

Erläuterung: Die Funktionaldeterminante nicht vergessen!

3

6D. Wir parametrisieren auch den Deckel D in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi_D \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ 1-\rho^2/4 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi, \rho \text{ wie oben}$$

Berechnen Sie damit den Normalenvektor des Deckels D:

$$\frac{\partial\Phi_D}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi_D}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -\rho/2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\rho^2/2)\cos\varphi \\ (\rho^2/2)\sin\varphi \\ \rho \end{pmatrix}$$

3

6E. Berechnen Sie den Fluss von $f(x,y,z) = \big(0, 0, z\sqrt{x^2+y^2}\big)$ durch den Deckel D nach außen:

$$\int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S = \int_{\rho=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (1-\rho^2/4)\rho \cdot \rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \qquad \text{Einsetzen}$$

$$= 2\pi \int_{\rho=0}^{2} \rho^2 - \rho^4/4 \,\mathrm{d}\rho \qquad \text{Vereinfachen}$$

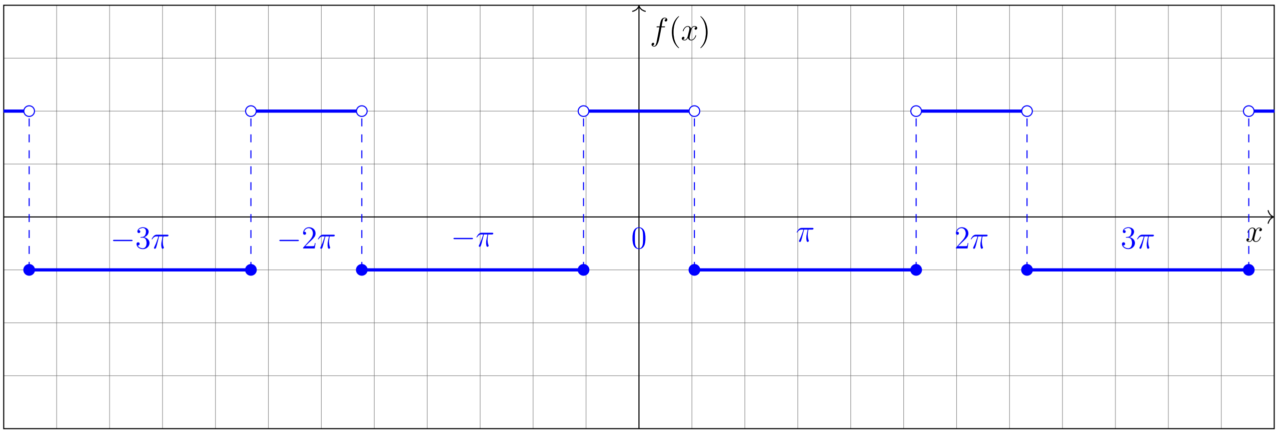
$$= 2\pi \left[\frac{1}{3}\rho^3 - \frac{1}{20}\rho^5\right]_{\rho=0}^{2} = 2\pi\left[\frac{8}{3} - \frac{8}{5}\right] = \frac{32\pi}{15} \approx 6.7 \qquad \text{Ausrechnen}$$

Erläuterung: Bis auf einen Faktor 5 ist dieses Integral dasselbe wie oben. Das liegt an unserem besonders einfachen Vektorfeld! Im Allgemeinen sind die Rechnungen verschieden und etwas schwieriger. Das Flussintegral über den Boden B können Sie ebenso berechnen. (Übung!) Die Summe erfüllt dann den Integralsatz von Gauß; der wurde hier nicht gefragt.

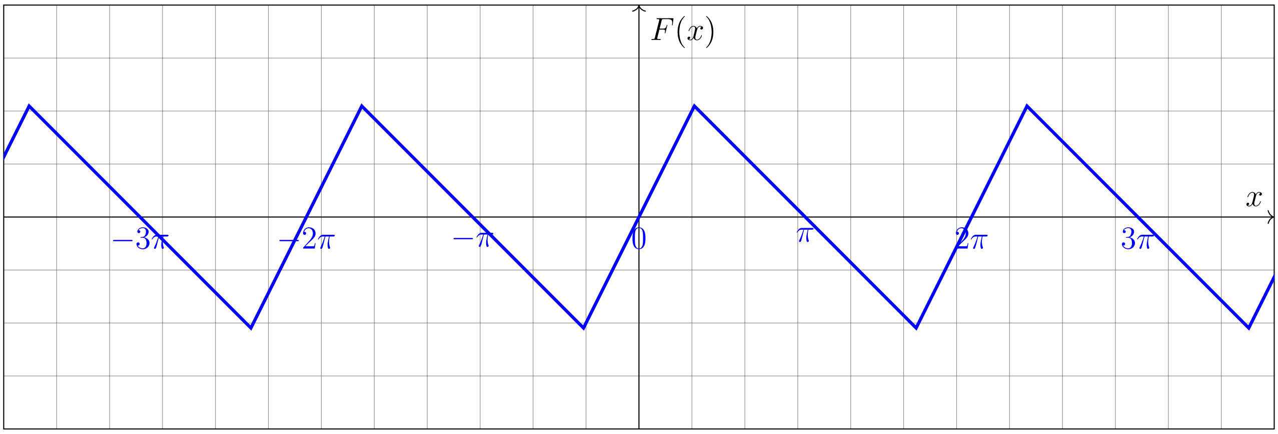
3

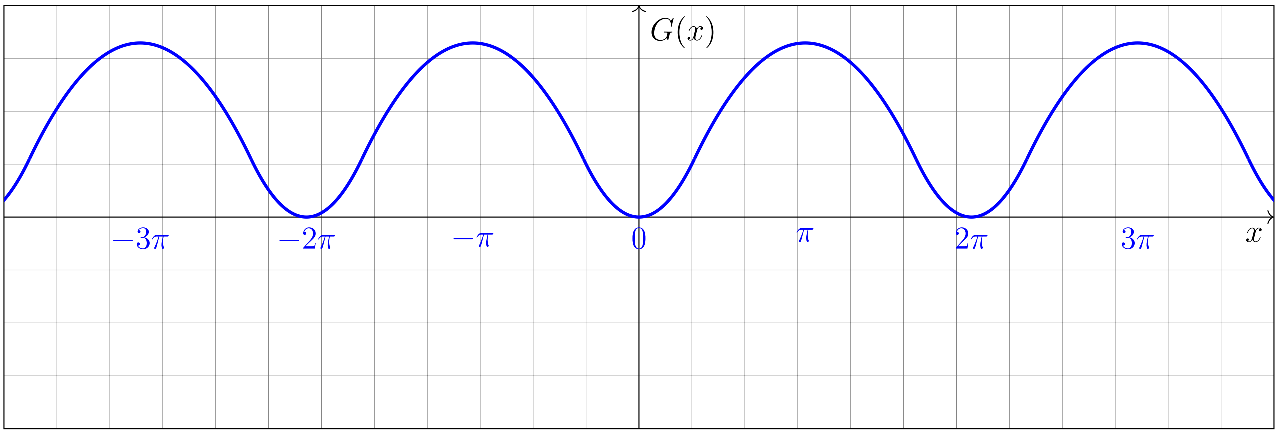
Aufgabe 7. *Fourier–Reihen (3+2+4+3 = 12 Punkte)*

7A. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch und gerade mit $f(x) = 2$ für $0 \le x < \pi/3$ und $f(x) = -1$ für $\pi/3 \le x \le \pi$. Skizzieren Sie f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



Skizzieren Sie ebenso die Funktion F mit $F(x) = \int_{t=0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ sowie G mit $G(x) = \int_{t=0}^{x} F(t)\,\mathrm{d}t$:





3

7B. Finden Sie die Grenzwerte der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ von f in $x \in \{\pi, \pi/3\}$:

$\lim_{n\to\infty} f_n(\pi) = \boxed{-1}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(\pi/3) = \boxed{\frac{1}{2}}$ 2

7C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) \, \mathrm{d}x = 0$$ ungerader Integrand!

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) \, \mathrm{d}x$$ gerader Integrand! $a_0 = 0$ nach Skizze

$$= \frac{2}{\pi} \left[2 \int_{x=0}^{\pi/3} \cos(kx) - \int_{x=\pi/3}^{\pi} \cos(kx) \, \mathrm{d}x \right]$$ Funktion f einsetzen

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\sin(kx)}{k} \right]_{x=0}^{\pi/3} - \frac{2}{\pi} \left[\frac{\sin(kx)}{k} \right]_{x=\pi/3}^{\pi}$$ Stammfunktion / HDI

$$= \frac{6}{k\pi} \sin(k\pi/3)$$ Sorgfältig ausrechnen

$$= \frac{3}{k\pi} \cdot \begin{cases} +\sqrt{3} & \text{für } k = 1, 2, 7, 8, 13, 14, \dots, \\ -\sqrt{3} & \text{für } k = 4, 5, 10, 11, 16, 17, \dots, \\ 0 & \text{für } k = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, \dots . \end{cases}$$ Zur Information

4

Die Auswertung der Fourier–Reihe an geeigneten Punkten wurde in dieser Klausur nicht gefragt.

7D. Folgern Sie die Koeffizienten der Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$A_0 =$ 0 dank Integral oder Symmetrie, siehe Skizze!

$A_k =$ $-\frac{b_k}{k} = 0$ dank Symmetrie oder nach Integrationsregel

$B_k =$ $\frac{a_k}{k} = \frac{6}{k^2\pi} \sin(k\pi/3)$ nach Integrationsregel

3