Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**, oft auch **Teilaufgaben** untereinander. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/13	/14	/10	/10	/72

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Es geht hier vorrangig um die Beherrschung der grundlegenden Begriffe und Techniken. Alle Rechnungen, insbesondere Integrale, sind ganz bewusst noch einfach gehalten. In der späteren Abschlussklausur (Modulprüfung) sind die Rechnungen meist anspruchsvoller.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Existenz 1: Zu lösen sei $y'(x) = a(x) + b(x)\,y(x)^2$ mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
Existiert für alle a, b und zu jedem Startwert $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Nein. Konkretes Gegenbeispiel: Die Gleichung $y'(x) = y(x)^2$ mit Startwert $y(0) = 1$ wird gelöst durch $y :]-\infty, 1[\to \mathbb{R} : x \mapsto y(x) = (1-x)^{-1}$ und hat eine Polstelle bei $x = 1$.

Erläuterung: Der Existenzsatz garantiert nur eine lokale Lösung, im Allgemeinen nicht global. Das hier angegebene Beispiel kennen Sie aus der Vorlesung. Varianten sind ebenso möglich.

2

2B. Existenz 2: Zu lösen sei $y'(x) = a(x) + b(x)\,y(x)$ mit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.
Existiert für alle a, b und zu jedem Startwert $y(x_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ eine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Ja. Für lineare Differentialgleichungen haben wir eine (globale) Lösungsformel.

Erläuterung: Das ist eine der Erkenntnisse, die wir aus der expliziten Formel gewinnen können: Das Wachstum der rechten Seite ist ausreichend kontrolliert, um Polstellen zu vermeiden!

$$y(x) = \mathrm{e}^{B(x)} \int_{t=x_0}^{x} \mathrm{e}^{-B(t)}\, a(t)\, \mathrm{d}t \;+\; \mathrm{e}^{B(x)}\, y_0 \quad \text{mit} \quad B(x) = \int_{t=x_0}^{x} b(t)\, \mathrm{d}t$$

Explizite Formeln sind informativ und schön!

2

2C. Kreuzungen 1: Die Gleichung $y'(x) = 3\sqrt[3]{y(x)^2}$ wird gelöst durch $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v(x) = 0$.
Gibt es eine überkreuzende Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

Ja. Auch die Funktion $u(x) = x^3$ ist eine Lösung und kreuzt die Lösung $v(x) = 0$.

Erläuterung: Sie kennen dieses Beispiel aus der Übung. Der Eindeutigkeitssatz ist hier nicht anwendbar, denn die rechte Seite $f(x, y) = 3\sqrt[3]{y(x)^2}$ ist nicht stetig differenzierbar nach y.

Dieses Aufgabenpaar zeigt zweierlei. Erstens: Der Eindeutigkeitssatz ist nicht nur schön, sondern auch nützlich. Zweitens: Seine Voraussetzungen sind zwar recht milde, doch wesentlich.

2

2D. Kreuzungen 2: Die Gleichung $y'(x) = \sin(y(x))$ wird gelöst durch $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : v(x) = 0$. Gibt es eine überkreuzende Lösung $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

Nein. Sonst gäbe es ein $x_0 \in \,]-1, 1[$ mit $u(x_0) = v(x_0)$ und dank Eindeutigkeitssatz wäre $u = v$. Dieser Satz ist hier anwendbar, denn die rechte Seite ist stetig differenzierbar nach y.

Erläuterung: Sie kennen dieses Frage aus der Übung. Im Gegensatz zur vorigen Frage 2C ist der Eindeutigkeitssatz hier auf die Frage 2D anwendbar, denn die rechte Seite $f(x, y) = \sin(y(x))$ ist stetig differenzierbar nach y. Das Verhalten dieser Differentialgleichungen ist verschieden!

Dieses Aufgabenpaar zeigt zweierlei. Erstens: Der Eindeutigkeitssatz ist nicht nur schön, sondern auch nützlich. Zweitens: Seine Voraussetzungen sind zwar recht milde, doch wesentlich.

2

2E. Diagonalisierung 1: Ist jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ mit $\det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 1$ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

Ja. Zu jedem der vier Eigenwerte $\pm1, \pm\mathrm{i}$ existiert ein Eigenvektor;
diese vier sind linear unabhängig, bilden also eine Basis des $\mathbb{C}^4$.

Erläuterung: Diagonalisierbar bedeutet, es existiert eine Basis aus Eigenvektoren. Das ist hier garantiert! Egal wie kompliziert A auch sein mag, dank dieses charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 1$ gibt es immer eine Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$, so dass gilt:

$$_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren machen kompliziertes einfach!

2

2F. Diagonalisierung 2: Ist jede Matrix $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ mit $\det(A - \lambda E) = \lambda^4$ diagonalisierbar?

Begründete Antwort:

Nein. Ein konkretes Gegenbeispiel ist der 4×4–Jordan–Block oder mehrere kleine Blöcke:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Erläuterung: Bei mehrfachen Eigenwerten *kann* es vorkommen, dass nicht genügend Eigenvektoren existieren. Es *muss* nicht, aber es *kann* vorkommen, das hängt ganz von A ab! Sie kennen die Lösung in solchen Fällen: Es gibt immer eine Basis aus Hauptvektorketten.

Gegenfragen: (1) Welche Matrizen $A \in \mathbb{C}^{4\times4}$ mit $\det(A - \lambda E) = \lambda^4$ sind diagonalisierbar?
(2) Kann eine strikt obere Dreiecksmatrix $A \neq 0$ mit $\det(A - \lambda E) = \lambda^4$ diagonalisierbar sein?

2

Aufgabe 3. *Exakte und separierbare Differentialgleichungen (4+4+4 = 12 Punkte)*

Zu lösen ist für $y :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}_{>0} : x \mapsto y(x)$ die Differentialgleichung

$$\underbrace{+\,y\sin(x)}_{f(x,y)} \underbrace{-\,3\cos(x)}_{g(x,y)}\, y' = 0 \quad \text{mit} \quad y(0) = \pi.$$

3A. Berechnen Sie zunächst die Rotation:

$\operatorname{rot}(f,g) = 3\sin(x) - \sin(x) = 2\sin(x) \neq 0$ Unsere DG ist nicht exakt!

Erläuterung: Wegen $\operatorname{rot}(f,g) \neq 0$ gibt es kein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi) = (f,g)$. Diese Berechnung können wir aber zur Konstruktion eines integrierenden Faktors nutzen...

1

Finden Sie einen integrierenden Faktor $\lambda(y)$, der nur von y abhängt:

$$\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)} = +\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{f} = \frac{2}{y}$$ Bedingung an $\lambda(y)$

$$\Longrightarrow \quad \ln\lambda(y) = 2\ln y + c$$ Beide Seiten integrieren

$$\Longrightarrow \quad \lambda(y) = Cy^2$$ Exponentialfunktion anwenden, $C = e^c > 0$

Erläuterung: Es gibt demnach ein Potential $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $(\partial_x\Phi, \partial_y\Phi) = (y^2 f, y^2 g)$. (Es genügt hierzu, *irgendeine* Konstante $C > 0$ zu wählen, am einfachsten ist $C = 1$.) Ein Potential können Sie nun tatsächlich leicht berechnen — sogar auf verschiedene Arten, zum Beispiel durch koordinatenweise Integration. Das gelingt hier besonders einfach!

Dieses Beispiel erlaubt auch integrierende Faktoren, die nur von x abhängen. Die Rechnung verläuft analog, wird aber hier nicht weiter ausgeführt. Die Lösung ist schließlich dieselbe.

3

3B. Bestimmen Sie ein Potential $\Phi(x,y)$ zum skalierten Vektorfeld $(\,\lambda(y)f(x,y),\ \lambda(y)g(x,y)\,)$:

$\Phi(x,y) = -y^3\cos(x) \quad (+\text{const})$ Machen Sie die Probe!

2

Lösen Sie damit die Differentialgleichung mit dem Startwert $y(0) = \pi$:

$y(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt[3]{\cos(x)}}$ Machen Sie die Probe!

2

3C. Lösen Sie durch Trennung der Variablen $y\sin(x) - 5\cos(x)\,y' = 0$ mit $y(0) = \pi$.

	$5\cos(x)\,y'(x) = y(x)\sin(x)$	Unsere Differentialgleichung
$\Longleftrightarrow$	$\dfrac{y'(x)}{y(x)} = \dfrac{1}{5}\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$	Umformen zur Trennung
$\Longleftrightarrow$	$\ln y(x) = -\dfrac{1}{5}\ln\cos(x) + c$	Beide Seiten integrieren
$\Longleftrightarrow$	$y(x) = \dfrac{C}{\sqrt[5]{\cos(x)}}$	Exponentialfunktion anwenden
Lösung:	$y(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt[5]{\cos(x)}}$	Der Startwert fordert $C = \pi$. Probe!

Erläuterung: Dasselbe Ergebnis erhalten Sie, analog zur vorigen Rechnung, auch durch einen integrierenden Faktor. Die Konstante 3 oder 5 können Sie dabei durch $\alpha \neq 0$ ersetzen.

4

Hinweis: Um sicher zu sein, dass die von Ihnen gefundene Lösung tatsächlich korrekt ist, dürfen Sie jeweils die Probe machen. Das ist einfach, schnell und sicher.

Aufgabe 4. *Lineare Differentialgleichungen* (*2+2+4+2+3 = 13 Punkte*)

4A. Zu lösen ist die Differentialgleichung $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$p(x) =$ $x^2 + 6x + 10 = (x + 3 + \mathrm{i})(x + 3 - \mathrm{i})$ Quadratisches Polynom

2

4B. Folgern Sie die allgemeine komplexe Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$ $c_1\,\mathrm{e}^{(-3-\mathrm{i})t} + c_2\,\mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ Komplexe Fundamentallösungen

Folgern Sie die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$ $a_1\,\mathrm{e}^{-3t}\cos(t) + a_2\,\mathrm{e}^{-3t}\sin(t)$ mit $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ Reelle Fundamentallösungen

2

4C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = \mathrm{e}^t$.

$y(t) =$ $\dfrac{1}{p(1)}\,\mathrm{e}^t = \dfrac{1}{17}\,\mathrm{e}^t$ Exponentialansatz / Lösungsformel

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = t\,\mathrm{e}^t$.

Ansatz $y(t) =$ $(at + b)\,\mathrm{e}^t$ Der Erfolg ist garantiert.

Lösung $y(t) =$ $\dfrac{1}{17}\left[t - \dfrac{8}{17}\right]\mathrm{e}^t = \left[\dfrac{1}{17}t - \dfrac{8}{289}\right]\mathrm{e}^t$ Dem Ansatz sei Dank!

4

4D. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t}$.

$$y(t) = \boxed{\frac{1}{p'(-3+\mathrm{i})}\, t\, \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\, t\, \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\, t\, \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t} \qquad \text{Resonanz, Lösungsformel}}$$

Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = \mathrm{e}^{-3t}\cos(t)$.

$$y(t) = \boxed{\operatorname{Re}\Big[-\frac{\mathrm{i}}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-3t}\cos(t) + \frac{1}{2}\, t\, \mathrm{e}^{-3t}\sin(t)\Big] = \frac{1}{2} t\, \mathrm{e}^{-3t}\sin(t) \qquad \text{Realteil der vorigen Lösung}}$$

2

4E. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y''(t) + 6y'(t) + 10y(t) = t\, \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t}$.

$$\text{Ansatz } y(t) = \boxed{(at+b)\, t\, \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t} \qquad \text{Der Erfolg ist garantiert.}}$$

$$\text{Lösung } y(t) = \boxed{\Big[\frac{1}{4} - \frac{\mathrm{i}}{4} t\Big]\, t\, \mathrm{e}^{(-3+\mathrm{i})t} \qquad \text{Dem Ansatz sei Dank!}}$$

3

Aufgabe 5. *Lineare Differentialgleichungssysteme* (*2+2+4+2+2+2 = 14 Punkte*)

Zu lösen ist $y'(t) = A\,y(t)$. Gegeben sind hierzu die Systemmatrix A und drei Vektoren:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 & 4 \\ 6 & -6 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 0 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5A. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Eigenvektor: Welcher und zu welchem Eigenwert?

Eigenvektor $v_1 =$ $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ Dank Probe! zum Eigenwert $\lambda_1 =$ $2\mathrm{i}$

2

5B. Bestimmen Sie damit einen zweiten, linear unabhängigen Eigenvektor:

Eigenvektor $v_2 =$ $\overline{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}$ Konjugation! zum Eigenwert $\lambda_2 =$ $-2\mathrm{i}$

2

5C. Einer der Vektoren u_1, u_2, u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe.

Bestimmen Sie zunächst den doppelten Eigenwert $\lambda_3 = \lambda_4 =$ -3 Dank Spur!

sowie die Matrix $A - \lambda_4 =$ $A + 3 \quad = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 2 & 3 \\ 4 & -6 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$:

Hauptvektor $v_4 =$ $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ Dank Probe!, Sie suchen $0 \xleftarrow{A+3} v_3 \xleftarrow{A+3} v_4$.

Eigenvektor $v_3 = \boxed{(A+3)v_4 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}}$. Schreiben Sie v_3 explizit als Spaltenvektor!

4

5D. Folgern Sie die Determinante $\det A = \boxed{\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \lambda_3 \cdot \lambda_4 = 36}$

und schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix bezüglich der obigen Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$:

$$
{}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\mathrm{i} & 0 & 0 & 0\\ 0 & -2\mathrm{i} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -3\end{pmatrix}
$$

Sie erhalten Jordan–Blöcke!

2

5E. Bestimmen Sie die Lösung $y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_4'(t) = A\,y_4(t)$ und $y_4(0) = v_4$.

$$
y_4(t) = \mathrm{e}^{-3t}(v_4 + t v_3) = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1+t\\2\\t\end{pmatrix}
$$

Dies ist eine reelle Hauptfunktion.

Bestimmen Sie die Lösung $y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_3'(t) = A\,y_3(t)$ und $y_3(0) = v_3$.

$$
y_3(t) = \mathrm{e}^{-3t} v_3 = \mathrm{e}^{-3t}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}
$$

Dies ist eine reelle Eigenfunktion.

2

5F. Bestimmen Sie die Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y'(t) = A\,y(t)$ und $y(0) = u_1$. (Kein Tippfehler!)

$$
y(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} v_1 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} v_2 = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}t} v_1) = \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}t} v_2) = \begin{pmatrix}\cos(2t)\\ \cos(2t)\\ -\sin(2t)\\ 0\end{pmatrix}
$$

2

Schreiben Sie diese reelle Lösung explizit als Spaltenvektor.

Aufgabe 6. *PDE und Separationsmethode (3+3+2+2 = 10 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\geq 0} \times [0, \pi] \to \mathbb{R} : (t, x) \mapsto u(t, x)$ die partielle Differentialgleichung

$\partial_t^2 u(t,x) = -\partial_x^2 u(t,x)$	für alle $t > 0$ und $0 < x < \pi$,
$u(0,x) = 0$	Startwerte für $t = 0$ und alle $0 < x < \pi$,
$\partial_t u(0,x) = h(x)$	Startwerte für $t = 0$ und alle $0 < x < \pi$,
$u(t,0) = u(t,\pi) = 0$	Randwerte für $x \in \{0, \pi\}$ und alle $t \geq 0$.

Suchen Sie zunächst Lösungen in Produktform $u(t,x) = v(t) \cdot w(x)$.

6A. Stellen Sie durch Separation die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(x)$ auf:

$-w''(x) = \lambda w(x)$ mit Separationskonstante $\lambda \in \mathbb{R}$

Bestimmen Sie alle periodischen Lösungen $w(x)$ dieser Gleichung (ohne Randbedingungen):

$w(x) =$ $a \sin(\sqrt{\lambda}\, x) + b \cos(\sqrt{\lambda}\, x)$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $a, b \in \mathbb{R}$

Bestimmen Sie hierzu alle Lösungen w_n $(n \in \mathbb{N})$ mit Randbedingungen $w_n(0) = w_n(\pi) = 0$:

$w_n(x) =$ $a_n \sin(nx)$ mit $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ und $\lambda = n^2$

$\overline{}$ 3

6B. Stellen Sie die an $w(x)$ gekoppelte gewöhnliche Differentialgleichung für $v(t)$ auf:

$v''(t) = \lambda v(t)$ mit obiger Kopplungskonstanten λ

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung $v(t)$ dieser Gleichung (noch ohne Startbedingungen):

$v(t) =$ $a\,\mathrm{e}^{\sqrt{\lambda}t} + b\,\mathrm{e}^{-\sqrt{\lambda}t}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $a, b \in \mathbb{R}$

Bestimmen Sie zu w_n die Lösung v_n $(n \in \mathbb{N})$ mit Startbedingungen $v_n(0) = 0$ und $v_n'(0) = 1$:

$v_n(t) =$ $\dfrac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{nt} - \dfrac{1}{2n}\,\mathrm{e}^{-nt} = \dfrac{1}{n}\sinh(nt)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ und $\lambda = n^2$

3

Die allgemeine Lösung lautet demnach

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n v_n(t) w_n(x) \quad \text{mit} \quad u(0,x) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_t u(0,x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n w_n(x).$$

6C. Bestimmen Sie speziell die Lösung zu den Startwerten $u(0,x) = 0$ und $\partial_t u(0,x) = \sin(3x)$.

$u(t,x) =$ $\dfrac{1}{3}\sinh(3t)\sin(3x)$ Machen Sie die Probe!

2

6D. Bestimmen Sie entsprechend die Lösung zu $\partial_t u(0,x) = x = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$.

$u(t,x) =$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n^2}\sinh(nt)\sin(nx)$ Fourier sei Dank!

2

Aufgabe 7. *PDE und Charakteristikmethode (3+4+3 = 10 Punkte)*

Zu lösen ist für $u : \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (t,x) \mapsto u(t,x)$ die partielle Differentialgleichung

$\partial_t u(t,x) + 3\partial_x u(t,x) = -2u(t,x)$ für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$,

$u(0,x) = \sin(x)$ Startwerte für $t = 0$ und alle $x \in \mathbb{R}$.

7A. Geben Sie das charakteristische Differentialgleichungssystem an:

$t'(s) = 1,$ $t(0) = 0,$

$x'(s) = \boxed{3},$ $x(0) = x_0,$

$z'(s) = \boxed{-2z(s)},$ $z(0) = \boxed{\sin(x_0)}.$

3

7B. Bestimmen Sie damit die zugehörige Charakteristik; für diese gilt $u(t(s), x(s)) = z(s)$:

$t(s) = s,$ $x(s) = \boxed{x_0 + 3s},$ $z(s) = \boxed{e^{-2s}\sin(x_0)}.$

Vorgegeben sei nun ein Punkt $(t_1, x_1) \in \mathbb{R}_{\ge 0} \times \mathbb{R}$. Zu welchen Startwerten (t_0, x_0, z_0) läuft die Charakteristik über (t_1, x_1), das heißt $(t(s), x(s)) = (t_1, x_1)$ für ein $s \in \mathbb{R}_{\ge 0}$?

$t_0 = 0,$ $x_0 = \boxed{x_1 - 3t_1},$ $z_0 = \boxed{\sin(x_0) = \sin(x_1 - 3t_1)}.$

4

7C. Bestimmen Sie damit die gesuchte Lösung:

$u(t,x) =$ $e^{-2t}\sin(x - 3t)$ Startwerte transportiert längs Charakteristiken

Machen Sie schließlich die Probe:

$\partial_t u(t,x) =$ $-2\,e^{-2t}\sin(x-3t) - 3\,e^{-2t}\cos(x-3t)$ nach Produkt- und Kettenregel

$3\partial_x u(t,x) =$ $3\,e^{-2t}\cos(x-3t)$ Probe: $u(t,x)$ erfüllt die PDE!

3