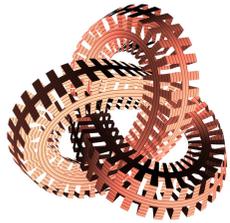


Geometrische Topologie und Knotentheorie

Eine Einführung in Bildern und Beispielen



Michael Eisermann

13. April 2017



Vorlesung im Sommersemester 2017 an der Universität Stuttgart
www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/2017/Geometrische-Topologie

1/72

Ziel dieser Einführung

Diese bildreiche Einführung entstand aus populärwissenschaftlichen Vorträgen zum Thema „Knoten und Zöpfe“, die ich in den letzten Jahren versucht habe. Für eine Mathematik-Vorlesung ist dieser Einstieg ungewöhnlich, ich schicke daher eine Erklärung voraus.

Diese Skizze präsentiert leicht fassliche Beispiele, sie soll motivieren, topologische Objekte vorstellen und ihre Eigenschaften ankündigen. Ich will einen ersten Eindruck dieses Gebietes vermitteln – und Freude daran. Dazu nutze ich anschauliche *Bilder* und erkläre *Ideen*. Manches Ergebnis lässt sich bereits anschaulich begründen, zum tieferen Verständnis sind die Formulierungen anschließend zu verfeinern.

Wer schon mit der Skizze glücklich und zufrieden ist, hat wenigstens diesen Einblick. Wer mehr wissen will, dem wird sie hoffentlich als Motivation dienen. Ziel der Vorlesung ist anschließend, eine solide mathematische Theorie aufzubauen, mit der wir die hier vorgestellten (und weitere) Ergebnisse präzisieren und beweisen können.

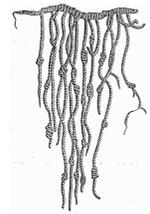
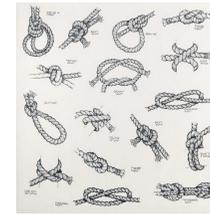
2/72

Überblick

- 1 Motivierende Fragen
- 2 Zöpfe
 - Wie modelliert man Zöpfe?
 - Wie rechnet man mit Zöpfen?
 - Anwendung auf Dirac-Zöpfe
- 3 Knoten
 - Wie modelliert man Knoten?
 - Wie rechnet man mit Knoten?
 - Gibt es inverse Knoten?
- 4 Die Tait-Vermutungen
 - Drall und Verschlingungszahl
 - Die Tait-Vermutungen
- 5 Kauffman-Klammer und Jones-Polynom
 - Kauffman-Klammer
 - Das Jones-Polynom
- 6 Zusammenfassung

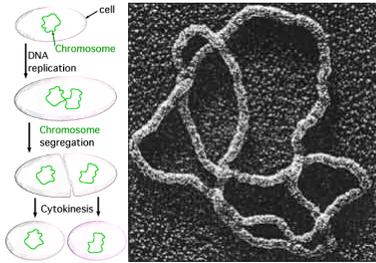
3/72

Knoten sind überall in unserer 3-dimensionalen Welt

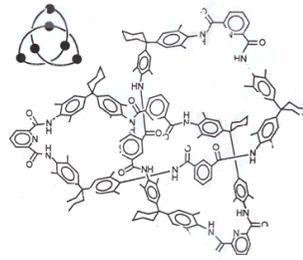


4/72

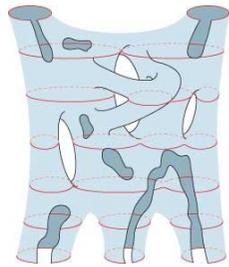
Knoten finden sich auch in den Naturwissenschaften



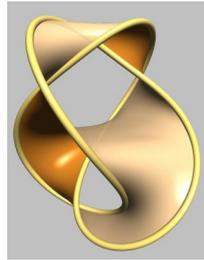
(a) Biologie



(b) Chemie



(c) theoretische Physik



(d) Mathematik

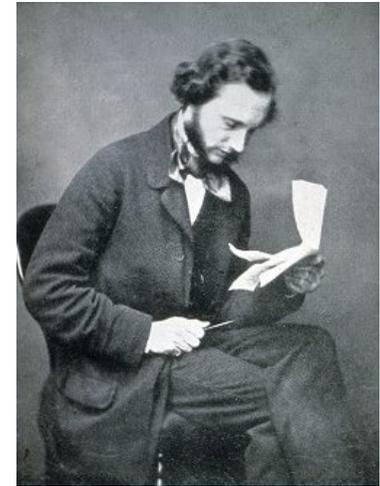
Vorläufer im 19. Jahrhundert

Carl Friedrich Gauß
(1777-1855)



deutscher Mathematiker, Physiker, Astronom, Professor in Göttingen

William Thomson, Lord Kelvin
(1824-1907)



englischer Physiker und Ingenieur, Professor in Glasgow

Knotentabellen von Tait–Little–Kirkman, 1870–1890

Trans. Roy. Soc. Edin^r THE FIRST SEVEN ORDERS OF KNOTTINESS. Vol. XXXII, Pl. XLIV

Amphich^t Amphich^t I Two forms II Two forms
 3 A 3 A 3 B 3 C β 3 A γ 3 F δ 3 G II, 3 C IV, 3 D V, 3 E III, 3 G
 III Two forms IV Unique V Unique VI Unique VII Unique I Un Amphich^t II Three forms III Two forms IV Unique
 VII, 3 L VI, 3 P X, 3 S IX, 3 T VIII, 3 U XI, 3 V 8 B 8 E 8 G 8 X 8 F 8 Q 8 T
 V Three forms, the 2^d & 3^d Amphich^t VI Two forms VII Un. Amph^t VIII Two forms IX Unique X Two forms XI Two forms
 8 Y 8 L 8 Am 8 Ac 8 Av 8 Ap 8 At 8 Au 8 Az 8 Bb 8 Ax 8 Bg 8 Bn
 XII Un Amphich^t XIII Unique XIV Unique XV Unique XVI Unique XVII Un Amph^t XVIII Unique I Unique II Six forms
 8 Bi 8 Bj 8 Bc 8 Bv 8 Bw 8 Bx 8 Bz 8 B 8 J 8 K 8 P 8 Q
 III Two forms IV Four forms V Unique VI Three forms
 8 Y 8 Z 8 L 8 V 8 S 8 Af 8 Ar 8 An 8 X 8 Ab 8 Aj 8 Aq
 VII Two forms VIII Six forms IX Unique X Unique XI Unique
 8 Ae 8 Ap 8 As 8 At 8 Au 8 Av 8 Ck 8 Cl 8 Bc 8 Bk 8 Bl

Knotentabellen von Tait–Little–Kirkman, 1870–1890

XII Four forms XIII Three forms XIV Four forms XV Four forms XVI Three forms XVII Four forms XVIII Three forms
 8 Bu 8 Dj 8 Ai 8 Ak 8 Az 8 Bg 8 Bw 8 Cd 8 Ce 8 Dv 8 Eb
 XIX Two forms XX Three forms XXI Four forms XXII Four forms
 8 Cf 8 Dk 8 Fj 8 El 8 Cj 8 Ft 8 Gy 8 Dq 8 Ds 8 Dt 8 Du 8 Dv 8 Fg 8 Ea
 XXIII Two forms XXIV Two forms XXV Four forms XXVI Three forms XXVII Two forms
 8 Ez 8 Fa 8 Fc 8 Fn 8 Ff 8 Fg 8 Fh 8 Gk 8 Em 8 Gl 8 Hz 8 Ht 8 Gp 8 Gq
 XXVIII Two forms XXIX Two forms XXX Two forms XXXI Two forms XXXII Two forms XXXIII Two forms
 8 Gt 8 Gv 8 Gx 8 Hi 8 Gz 8 Hh 8 Ha 8 Hj 8 Hs 8 Ib 8 Hy 8 Ih
 XXXIV Two forms XXXV Unique XXXVI Unique XXXVII Unique XXXVIII Unique XXXIX Unique XL Unique XLI Unique
 8 Ia 8 Ii 8 It 8 Ie 8 Il 8 Ip 8 Ir 8 Iq 8 Is

Erstes Experiment: Spin und Dirac-Zöpfe

Lässt sich der folgende Zopf entwirren?



Lässt sich der folgende „doppelt so komplizierte“ Zopf entwirren?



Fragen präzisieren und passende Werkzeuge erstellen:

- Was ist ein Zopf? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Was ist ein Dirac-Zopf? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Welche Hindernisse gibt es bei möglichen Umformungen?

§1.0

9/72

Zweites Experiment: Topologische Jonglage



Kann man ein Seil verknoten mit nur einer Hand?

Kann man ein Seil ebenso entknoten?



Fragen präzisieren und passende Werkzeuge erstellen:

- Was ist ein Knoten? Welche Bewegungen sind erlaubt?
- Wie kann man Knoten miteinander verknüpfen?
- Gibt es inverse Knoten, sozusagen „Anti-Knoten“?

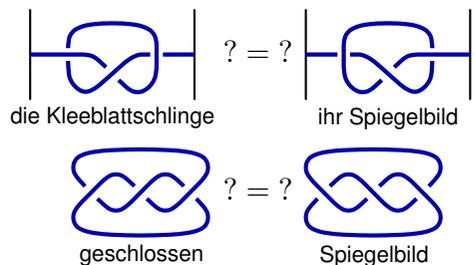


§1.0

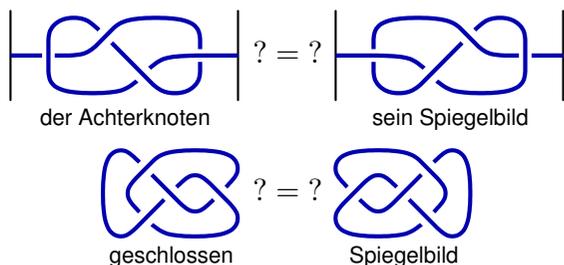
10/72

Drittes Experiment: Chiralität

Ist die Kleeblattschlinge äquivalent zu ihrem Spiegelbild?



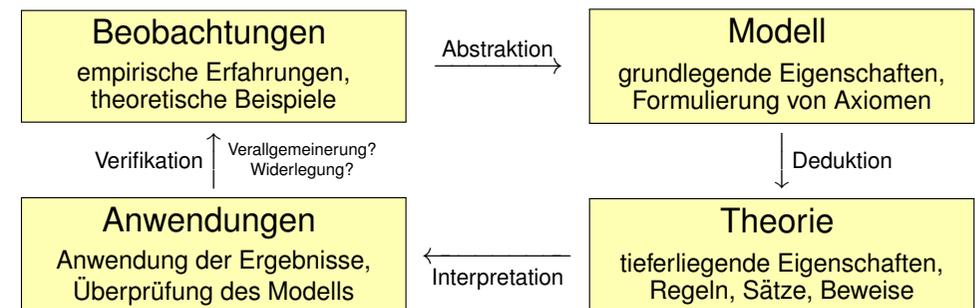
Ist der Achterknoten äquivalent zu seinem Spiegelbild?



§1.0

11/72

Modellierungskreislauf

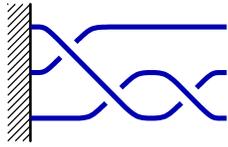


§2.1

12/72

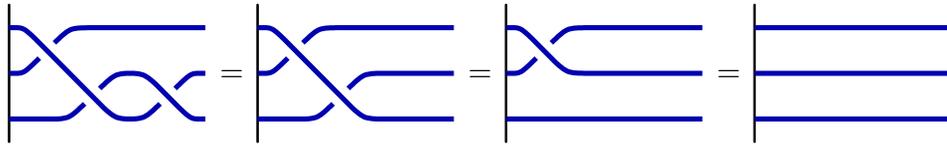
Wie modelliert man Zöpfe?

Erstes Modell:



Die Stränge sind flexibel, sie dürfen sich bewegen.

Schlechte Nachricht: In diesem ersten Modell sind alle Zöpfe gleich.



Besseres Modell:



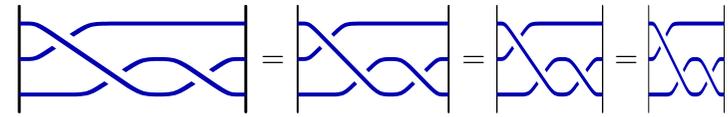
Wir fixieren die Enden links und rechts. Nur in der Mitte dürfen sich die Stränge bewegen.

§2.1

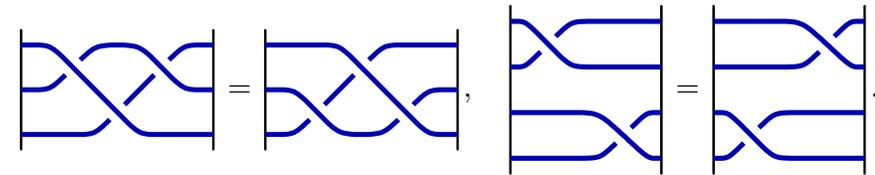
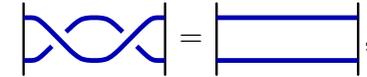
13/72

Wie modelliert man Zöpfe?

Die Länge ist unwesentlich:



Elementare Bewegungen:



Satz (Emil Artin 1925)

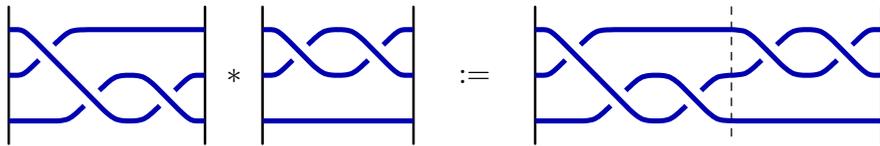
Diese drei elementaren Bewegungen reichen bereits aus.

§2.1

14/72

Verknüpfung von Zöpfen

Zöpfe auf n Strängen erlauben eine Verknüpfung:



Welche Rechenregeln gelten hier?

1 Ist diese Verknüpfung assoziativ?

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

2 Ist diese Verknüpfung kommutativ?

$$a * b = b * a$$

3 Gibt es ein neutrales Element?

$$a * 1 = a \quad \text{und} \quad 1 * a = a$$

4 Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf?

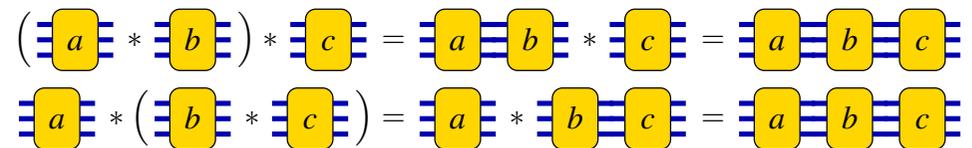
$$a * a^{-1} = 1 \quad \text{und} \quad a^{-1} * a = 1$$

§2.2

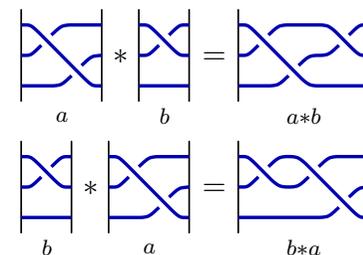
15/72

Verknüpfung von Zöpfen

Ist sie assoziativ? Ja!



Ist sie kommutativ? Nein!

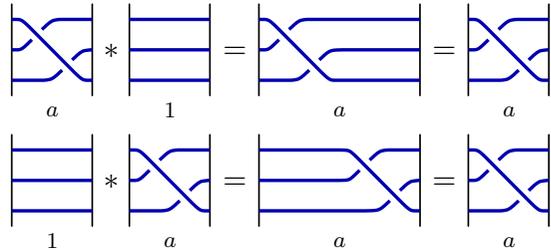


§2.2

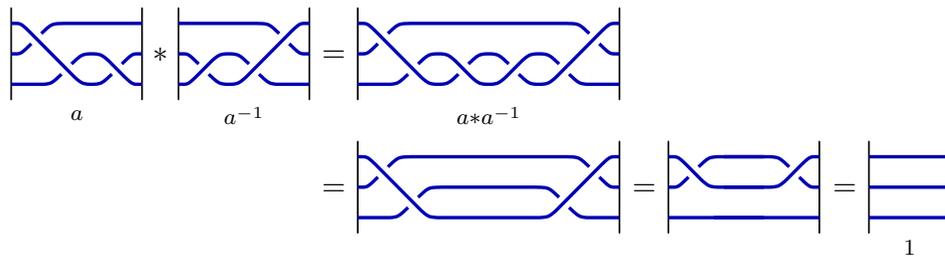
16/72

Verknüpfung von Zöpfen

Gibt es ein neutrales Element? Ja!



Gibt es zu jedem Zopf einen inversen Zopf? Ja!



§2.2

17/72

Die Zopfgruppe

Wir können mit Zöpfen rechnen:

- Die Verknüpfung von Zöpfen ist assoziativ:

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

- Es gibt ein neutrales Element 1, nämlich den trivialen Zopf:

$$a * 1 = 1 * a = a$$

- Zu jedem Zopf a gibt es einen inversen Zopf a^{-1} , sein Spiegelbild:

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = 1$$

Definition

Eine Verknüpfung mit diesen Eigenschaften heißt *Gruppe*.

Satz (Emil Artin 1925)

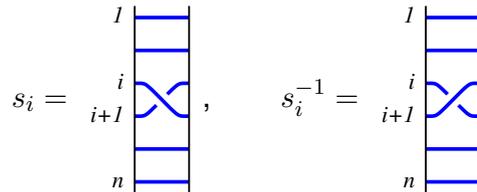
Die Verknüpfung von Zöpfen auf n Strängen ist eine Gruppe, $(B_n, *)$.

§2.2

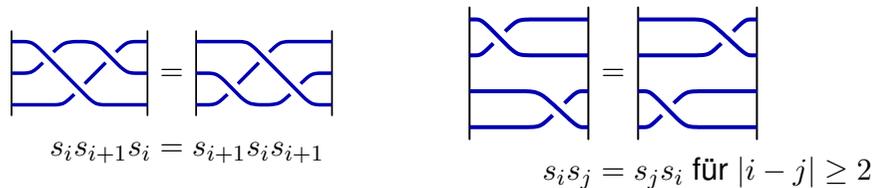
18/72

Rechenregeln für die Zopfgruppe

Elementare Zöpfe:



Elementare Relationen: Es gilt $s_i s_i^{-1} = s_i^{-1} s_i = 1$, und außerdem



Satz (Emil Artin 1925)

Die Zopfgruppe auf n Strängen erlaubt die Präsentation

$$B_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j \text{ für } |i-j| = 1 \\ s_i s_j = s_j s_i \text{ für } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle.$$

§2.2

19/72

Erläuterung zur Präsentation von Artin

Der elementare Zopf s_i führt eine halbe Drehung zwischen den Strängen i und $i+1$ aus, per Konvention rechtshändig. Sein inverser Zopf s_i^{-1} macht dies durch eine linkshändige halbe Drehung wieder rückgängig.

Zwischen den elementaren Zöpfen gelten die oben gezeigten elementaren Relationen: Dies sind genau die zuvor schon gesehenen elementaren Bewegungen von Zöpfen.

Der Satz von Artin macht nun zwei Aussagen:

- Erstens, die elementaren Zöpfe erzeugen die Gruppe B_n . Das bedeutet, jeder noch so komplizierte Zopf lässt sich schreiben als Produkt von elementaren Zöpfen. (Das glaubt man leicht.)
- Zweitens, die elementaren Relationen erzeugen bereits alle Relationen. Das bedeutet, jede noch so komplizierte Bewegung von Zöpfen lässt sich zerlegen in eine Folge von elementaren Bewegungen. (Das ist weniger offensichtlich.)

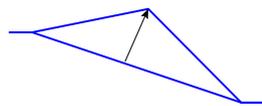
Somit haben wir eine perfekte Übersetzung zwischen Zöpfen und Formeln, also der topologischen Situation und ihrer algebraischen Beschreibung! Damit kann man wunderbar rechnen, auch auf dem Computer, was algorithmische Untersuchungen ausgelöst hat und seit Jahren ein aktives Forschungsgebiet ist.

§2.2

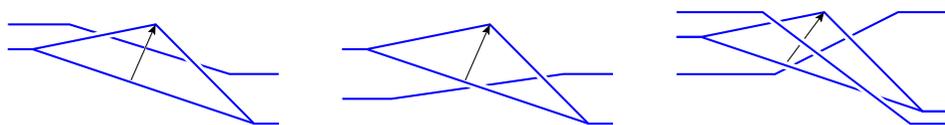
20/72

Beweis-Idee zum Satz von Artin

Jeder Zopf kann durch polygonale Stränge dargestellt werden. Wir können dann die elementaren Zöpfe ablesen und erhalten ein Wort in den Erzeugern s_1, \dots, s_{n-1} . Auch jede Bewegung kann als Folge polygonaler Bewegungen dargestellt werden:



Drei elementare Fälle erkennen wir sofort wieder:



- 1 Einfügen eines Paares entgegengesetzter Kreuzungen: $1 = s_i^{-1}s_i$.
- 2 Verschieben einer Kreuzung bezüglich anderer Kreuzungen: $s_i s_j = s_j s_i$.
- 3 Verschieben eines Stranges über eine Kreuzung: $s_{i+1} s_i s_{i+1} = s_i s_{i+1} s_i$.

Nach hinreichend feiner Unterteilung besteht jede Bewegung aus einer Folge dieser elementaren Bewegungen. Damit ist der Satz von Artin bewiesen.

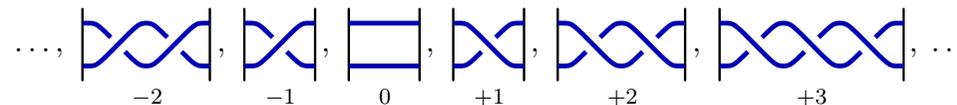
§2.2

21/72

Wie kann man diese Gruppen verstehen?

$n = 1$: Auf nur einem Strang ist jeder Zopf trivial:

$n = 2$: Zöpfe auf zwei Strängen verstehen wir auch noch gut:



Die Anzahl der Kreuzungen kann sich bei Bewegung ändern.

Beispiel: = \neq

Was zählt ist der Drall $v: (\mathbf{B}_n, *) \rightarrow (\mathbb{Z}, +)$ mit

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \quad v\left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array}\right) = -1, \quad v(a * b) = v(a) + v(b).$$

Korollar (Folgerung aus dem Satz von Artin)

Zöpfe auf zwei Strängen werden durch ihren Drall klassifiziert.

§2.2

22/72

Der Drall ist eine Invariante

Zum Beispiel gilt $v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = +1 + 1 - 1 = 1$

Nachweis der Invarianz:

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right), \quad v(s_i s_i^{-1}) = v(1) = 0$$

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right), \quad v(s_i s_j s_i) = v(s_j s_i s_j) = 3$$

$$v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}\right), \quad v(s_i s_j) = v(s_j s_i) = 2$$

Für $n \geq 3$ reicht der Drall nicht mehr zur Klassifikation: \mathbf{B}_3 ist nicht kommutativ! Man kann Zöpfe klassifizieren mit Hilfe von Matrizen.

§2.2

23/72

Das Zentrum von \mathbf{B}_n

Wir haben gesehen, dass die Gruppe \mathbf{B}_n nicht-kommutativ ist für $n \geq 3$.

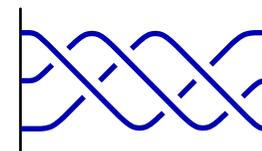
Manche Zöpfe kommutieren paarweise, zum Beispiel s_i und s_j für $|i - j| \geq 2$.

Gibt es auch Zöpfe, die mit *allen* anderen kommutieren?

Definition

Ein Zopf $c \in \mathbf{B}_n$ heißt *zentral*, wenn $b * c = c * b$ für alle $b \in \mathbf{B}_n$ gilt.

In \mathbf{B}_n entspricht der Zopf $z = (s_1 s_2 \cdots s_{n-1})^n$ einer vollen Drehung:



Dieser Zopf ist zentral. Also ist auch z^k zentral für alle $k \in \mathbb{Z}$.

Damit haben wir auch schon alle Möglichkeiten ausgeschöpft!

Satz

Für $n \geq 3$ ist jeder zentrale Zopf von der Form z^k für ein $k \in \mathbb{Z}$. □

§2.2

24/72

Eine Darstellung $B_3 \rightarrow SL_2\mathbb{Z}$

Für B_3 haben wir die Präsentation $B_3 = \langle s_1, s_2 \mid s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2 \rangle$.

Die Matrix $S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist invertierbar, mit Inverse $S_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ebenso ist $S_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ invertierbar, mit Inverse $S_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Zudem gilt die Relation $S_1 S_2 S_1 = S_2 S_1 S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Korollar (Folgerung aus der Präsentation von Artin)

Wir haben eine Darstellung $\phi: B_3 \rightarrow SL_2\mathbb{Z}$ mit $\phi(s_1) = S_1, \phi(s_2) = S_2$.

Wir erhalten also einen Gruppenhomomorphismus $\phi: B_3 \rightarrow SL_2\mathbb{Z}$, das heißt, es gilt $\phi(a * b) = \phi(a) \cdot \phi(b)$ für alle $a, b \in B_3$. Jeder Zopf a ist ein Produkt der Erzeuger s_1 und s_2 und ihrer Inversen. Wir definieren $\phi(a)$ als das entsprechende Produkt von S_1 et S_2 und ihren Inversen. Die Zopfrelation $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ wird hierbei respektiert.

Zum Beispiel gilt $\phi(z) = \phi((s_1 s_2)^3) = (S_1 S_2)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Alternativ gilt $z = s_1 s_2 s_1 s_2 s_1 s_2 = s_1 s_2 s_1 s_1 s_2 s_1 = (s_1 s_2 s_1)^2$.

Somit $\phi(z) = \phi((s_1 s_2 s_1)^2) = (S_1 S_2 S_1)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

In beiden Schreibweisen erhält man als Resultat dieselbe Matrix!

§2.2

25/72

Klassifikation der Zöpfe auf 3 Strängen

Es gilt $\phi(z) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, somit $\phi(z^2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also ist ϕ nicht treu.

Satz

Für $a \in B_3$ gilt $\phi(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ genau dann, wenn $a = z^{2k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Somit klassifiziert $(\phi, v): B_3 \rightarrow SL_2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ alle Zöpfe auf 3 Strängen. \square

Dieses schöne Resultat liefert einen Algorithmus zur Unterscheidung von Zöpfen auf 3 Strängen. Ähnliches gilt auch für mehr als 3 Stränge, wie der folgende Satz sagt.

Satz (Krammer 2001, Bigelow 2001)

Für jedes n existiert eine treue Darstellung $B_n \hookrightarrow GL_m\mathbb{R}$.

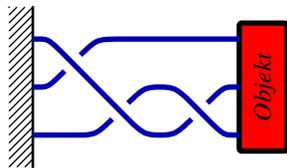
Die Darstellungen von Krammer und Bigelow sind wesentlich raffinierter und umfangreicher hinzuschreiben. Auch der Nachweis, dass es sich tatsächlich um treue Darstellungen handelt, ist deutlich schwerer. Ich nenne diesen schönen Satz vor allem, um diese kurze Skizze mit einem neuen Ergebnis abzurunden.

§2.2

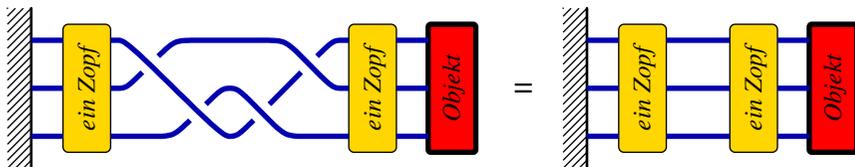
26/72

Dirac-Zöpfe (Theorie des Elektrons, Nobel-Preis 1933)

Wir ersetzen die rechte Wand durch ein kleineres Objekt.



Die Stränge können sich nun um das Objekt herum bewegen:

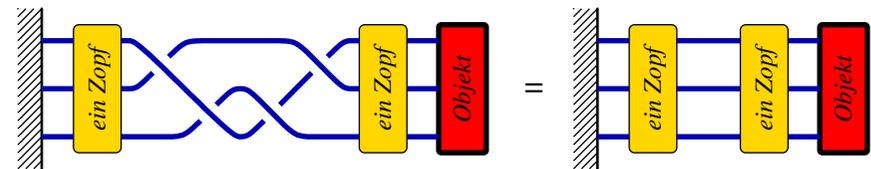


Dirac-Zöpfe verhalten sich genauso wie Artin-Zöpfe. Als einzige Neuerung erlauben Dirac-Zöpfe diese zusätzliche Bewegung. Wir können damit Zöpfe in Diracs Modell ineinander umformen, die in Artins Modell *nicht* äquivalent waren. Insbesondere kann sich nun der Drall ändern, wie in der Skizze zu sehen.

§2.3

27/72

Eine Präsentation für Dirac-Zöpfe



Satz (Newman 1942, Fadell 1962)

*Auch Dirac-Zöpfe auf n Strängen bilden eine Gruppe $(B'_n, *)$.*

Dies ist Artins Zopfgruppe B_n mit der zusätzlichen Relation

$$s_1 s_2 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_2 s_1 = 1.$$

§2.3

28/72

Das Phänomen des Spin

Ist der folgende Dirac-Zopf z äquivalent zum trivialen Zopf? Beweis?



Der Schlüssel ist folgende Beobachtung:

$$v \left(\begin{array}{c} \text{Dirac-Zopf } z \\ \text{mit einer vollen Drehung} \end{array} \right) - v \left(\begin{array}{c} \text{triviale vier Stränge} \end{array} \right) = 4$$

Ist der Dirac-Zopf z^2 äquivalent zum trivialen Zopf? Beweis?



§2.3

29/72

Eine Invariante: Drall modulo $2(n-1)$

Ausführlicher nutzen wir hier folgendes.

Diracs Zopfgruppe B'_n erlaubt die Präsentation

$$B'_n = \left\langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{ll} s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j|=1 \\ s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \end{array} \right\rangle$$

$$s_1 \cdots s_{n-1} s_{n-1} \cdots s_1 = 1$$

Der Drall induziert somit einen Gruppenhomomorphismus

$$v' : B'_n \rightarrow \mathbb{Z}/(2n-2).$$

Wir zählen die Exponentensumme jetzt nur modulo $2n-2$.

Wir erhalten $v' : B'_3 \rightarrow \mathbb{Z}/4$. Aus $v'(z) = 6$ und $v'(1) = 0$ folgt $z \neq 1$.

§2.3

30/72

Erläuterung

Es lohnt sich, die Struktur der Argumente genau durchzugehen. Um in B'_3 die Aussage $z \neq 1$ zu beweisen, haben wir einen Gruppenhomomorphismus $v' : B'_3 \rightarrow \mathbb{Z}/4$ benutzt: Aus $v'(z) = 6$ und $v'(1) = 0$ folgt $z \neq 1$.

Um hingegen $z^2 = 1$ zu zeigen, genügt die Information $v'(z^2) = 12 \equiv 0$ nicht. Glücklicherweise haben wir die Äquivalenz $z^2 = 1$ vorher direkt zeigen können.

Man kann die Gruppenstruktur von B_n und B'_n genauer untersuchen, und zum Beispiel B'_2 und B'_3 (relativ leicht) mit bekannten Gruppen identifizieren.

Aufgabe (für Fortgeschrittene und Neugierige)

- 1 Die Gruppe B'_2 ist endlich. Man zähle ihre Elemente auf.
- 2 Die Gruppe B'_3 ist endlich. Man zähle ihre Elemente auf.
- 3 Wie viele Elemente haben die Gruppen A_4 und $\mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/4$?
- 4 Existiert ein Isomorphismus $B'_3 \rightarrow A_4$ oder $B'_3 \rightarrow \mathbb{Z}/3 \times \mathbb{Z}/4$?

§2.3

31/72

Ergänzung

Das hier beobachtete Phänomen des Spin hat seine Ursache in $\pi_1 \text{SO}_3 \mathbb{R} \cong \mathbb{Z}/2$. Diese Gruppe operiert auf Dirac-Zöpfen, diese sind somit eine konkrete Illustration: Dirac-Zöpfe bezeugen, dass $\pi_1 \text{SO}_3 \mathbb{R}$ ein nicht-triviales Element besitzt, denn die Voldrehung operiert nicht trivial.

§2.3

32/72

Topologische Jonglage



Kann man ein Seil verknoten mit nur einer Hand?

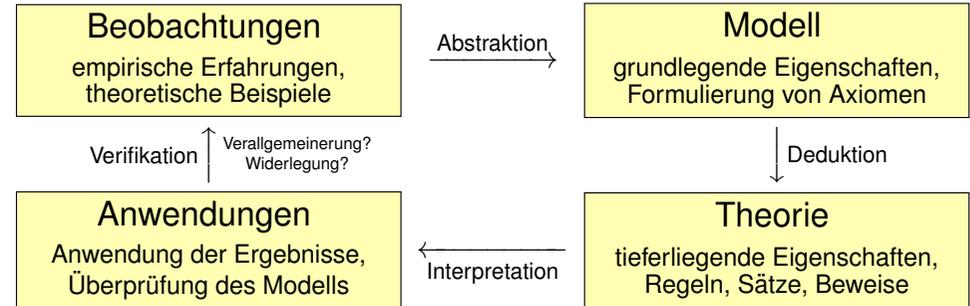
Kann man ein Seil ebenso entknoten?



Komplementäre Strategien:

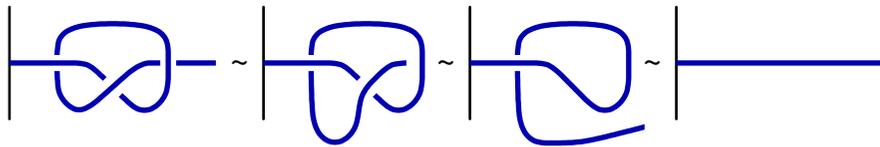
- Um zu beweisen, dass etwas möglich ist, genügt es, es zu tun. Mathematiker nennen dies einen „konstruktiven Beweis“.
- Um zu beweisen, dass etwas unmöglich ist, genügt es nicht, zu scheitern. In diesem Fall müssen wir das Hindernis verstehen. . .

Modellierungskreislauf

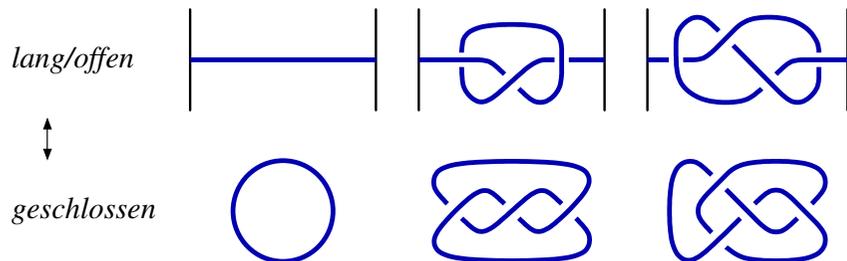


Wie modelliert man Knoten?

Beobachtung — In einem allzu naiven Modell sind alle Knoten gleich:



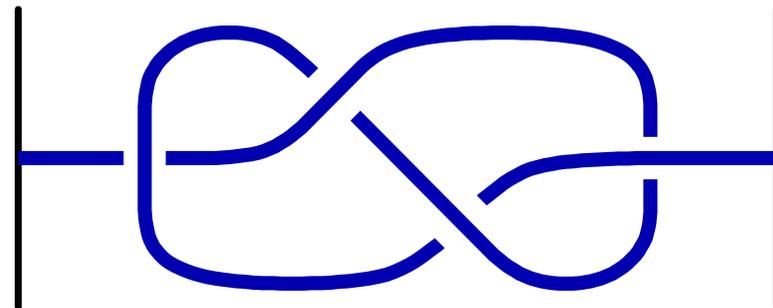
Zwei Modelle sind möglich (und erweisen sich als gleichwertig):



Wie zuvor darf sich der Strang bewegen.

Knoten und Diagramme — ein subtiler Unterschied

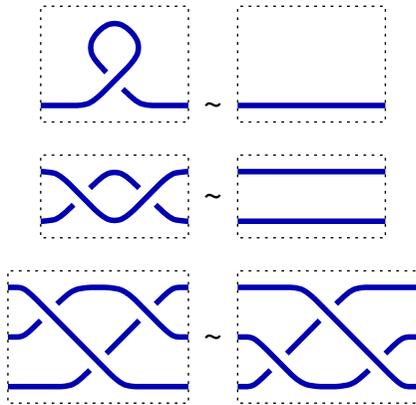
Ceci n'est pas un nœud.



(Ce n'est qu'un diagramme d'un nœud.)

Reidemeister–Züge

Die folgenden Züge ändern das *Diagramm*, nicht aber den *Knoten*:



Satz (Kurt Reidemeister 1926)

Diese drei elementaren Bewegungen reichen bereits aus.

§3.1

37/72

Erläuterungen zum Satz von Reidemeister

Der Satz von Reidemeister besagt ausführlicher folgendes:

- Erstens, jeder Knoten lässt sich durch ein Diagramm darstellen.
- Zweitens, jede noch so komplizierte Bewegung von Knoten lässt sich wiedergeben als eine endliche Folge von elementaren Bewegungen.

Der Satz von Reidemeister für Knoten entspricht dem Satz von Artin für Zöpfe. Auch der Beweis verläuft genauso: Man betrachtet polygonale Knoten und polygonale Bewegungen. Nach hinreichend feiner Unterteilung bleiben nur drei elementare Fälle, nämlich die gezeigten Reidemeister–Züge.

Vorgelegt seien zwei Diagramme A und B mit $\leq n$ Kreuzungen. Wir wollen feststellen, ob sie äquivalent sind oder nicht. Mit Reidemeister–Zügen können wir nun eine erschöpfende Suche starten. . .

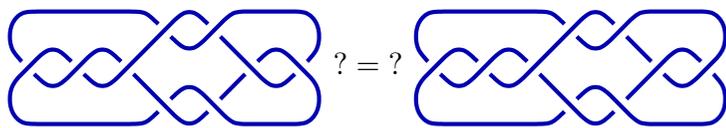
- Wenn wir Glück haben, finden wir eine Reidemeister–Folge von A nach B , was beweist, dass beide denselben Knoten darstellen. Umgekehrt: Stellen beide denselben Knoten dar, dann existiert solch eine Folge.
- Wenn wir Pech haben, dann finden wir keinen Weg von A nach B . Sind die beiden nicht äquivalent? Oder haben wir einfach nicht lange genug gesucht? In diesem Falle bleibt die Frage ungeklärt.

§3.1

38/72

Die Erkennung des trivialen Knotens bleibt schwierig.

Das Beispiel von Lebrecht Goeritz (1934):



Einer dieser beiden Knoten ist trivial: Welcher? Beweis?
Der andere Knoten ist die Kleeblattschlinge: Welcher? Beweis?
Für die Suche existiert zumindest eine theoretische Schranke:

Satz (Hass & Lagarias 2001)

Sei D ein Diagramm mit $\leq n$ Kreuzungen. Wenn D den trivialen Knoten darstellt, dann reichen $2^{100\,000\,000\,000\,000 \cdot n}$ Reidemeister–Züge.

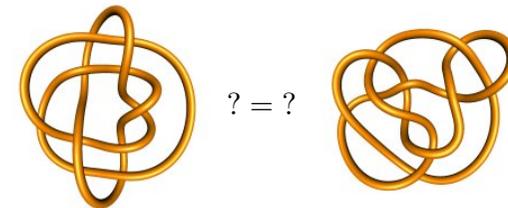
Die entsprechende Frage für Zöpfe ist wesentlich einfacher:
Wie kann man feststellen, ob ein vorgelegter Zopf trivial ist?
Artin (1925): Es existiert ein Algorithmus (wenig effizient, exponentiell).
Dehornoy (1998): Es existiert ein effizienter Algorithmus (polynomiell).

§3.1

39/72

Die Klassifikation von Knoten bleibt schwierig.

Das Knotenpaar von Kenneth Perko:



Seit dem 19. Jahrhundert hielt man obige Knoten für verschieden. Aber 1974 entdeckte Kenneth Perko, ein Topologe und Anwalt aus New York, dass sie in Wirklichkeit äquivalent sind! (siehe Homepage und www.knotplot.com/perko)
Auch hier ist eine theoretische (astronomische) Schranke bekannt:

Satz (Coward–Lackenby 2011)

Sind A und B äquivalent, dann reichen $2^{2^{\dots^{2^n}}}$ Reidemeister–Züge, wobei der Potenzturm die Höhe 2^n hat.

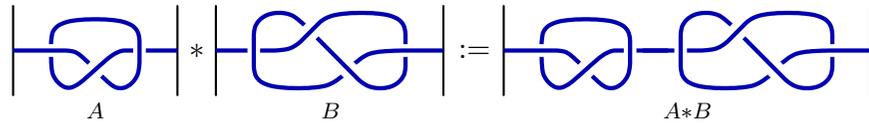
Offene Frage: Ist die Identifikation bzw. Unterscheidung von Knoten durch einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit lösbar?

§3.1

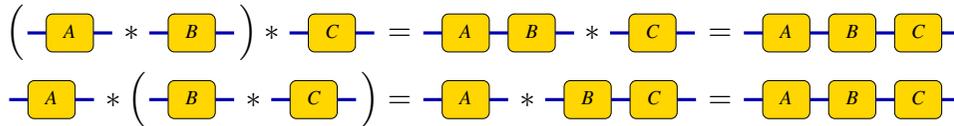
40/72

Verknüpfung von Knoten

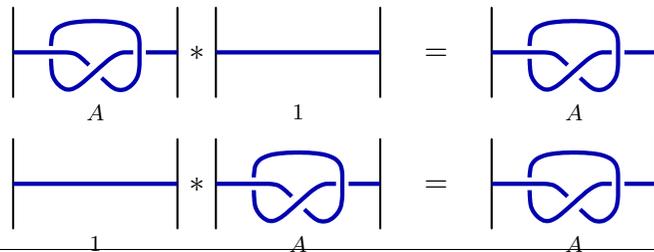
Auch Knoten erlauben eine Verknüpfung:



Ist sie assoziativ? $(A * B) * C = A * (B * C)$? Ja, klar!



Gibt es ein neutrales Element? $A * 1 = A$ und $1 * A = A$? Ja, klar!

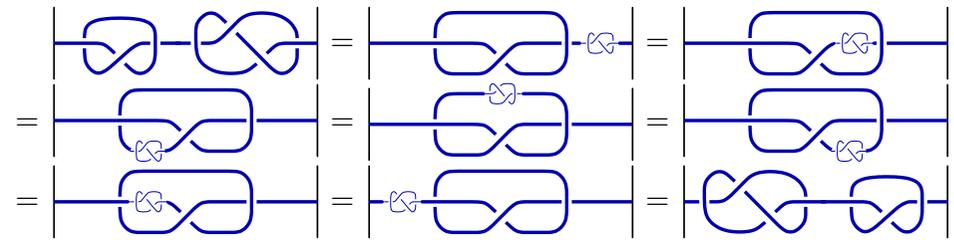


§3.2

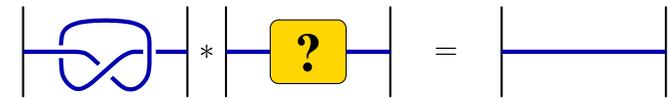
41/72

Verknüpfung von Knoten

Ist sie kommutativ? $A * B = B * A$?



Gibt es Inverse? $A * A^{-1} = 1$ und $A^{-1} * A = 1$?



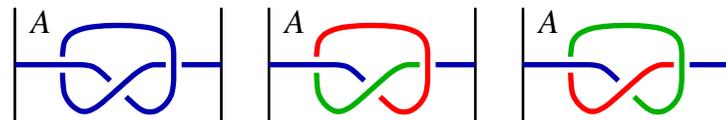
Das präzisiert unsere Frage zur „topologischen Jonglage“!

§3.2

42/72

Dreifärbungen (Ralph Fox 1971)

Wir betrachten ein Knotendiagramm und färben es blau, rot, grün.



Dabei verlangen wir folgende Regeln:

- 1 An jeder Kreuzung treffen entweder alle drei Farben zusammen oder nur eine einzige. (Wir verbieten zweifarbige Kreuzungen.)
- 2 Der Eingang sei blau. (Der Ausgang wird es dann auch sein.)



Für jedes Knotendiagramm D sei $\text{col}(D)$ die Anzahl der Dreifärbungen.

Wir finden zum Beispiel $\text{col}(A) = 3$ aber $\text{col}(T) = \text{col}(T') = 1$.

§3.2

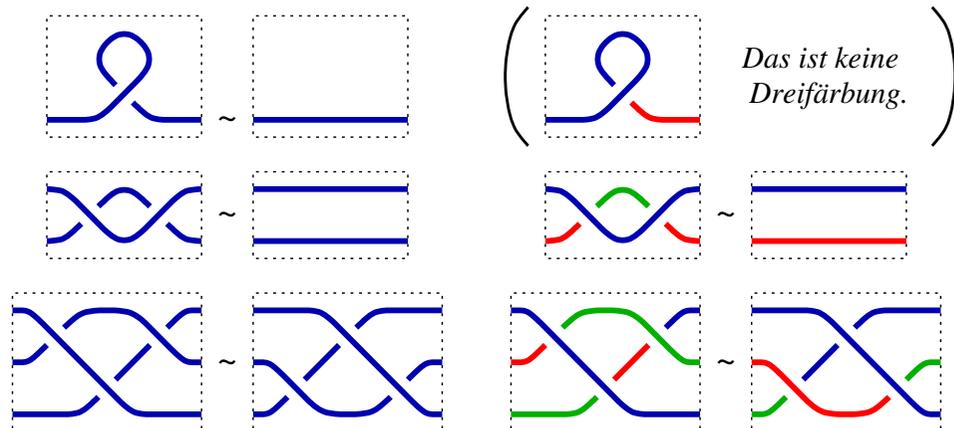
43/72

Dreifärbungen sind invariant!

Satz (Fox 1971)

Aus $D \sim D'$ folgt $\text{col}(D) = \text{col}(D')$.

Beweis. Reidemeister-Züge transportieren die Färbungen:



Umgekehrt gilt daher: Aus $\text{col}(D) \neq \text{col}(D')$ folgt $D \not\sim D'$.

§3.2

44/72

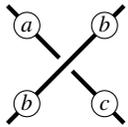
Umformulierung: Rechnen modulo 3

Wir kodieren die drei Farben durch 0, 1, 2 und rechnen modulo 3.

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Algebraische Umformulierung der Dreifärbungen

Um jede Kreuzung ist die Wechselsumme der Farben gleich 0.



Diese Regel besagt $a - b + c - d = 0$, also $a + c = b + d$.
 Aus $a = b$ folgt $c = d$: Die Kreuzung ist also einfarbig.
 Im Falle $a \neq b$ ist $c = b + d - a$ immer die dritte Farbe.
 Zweifarbige Kreuzungen sind somit ausgeschlossen.

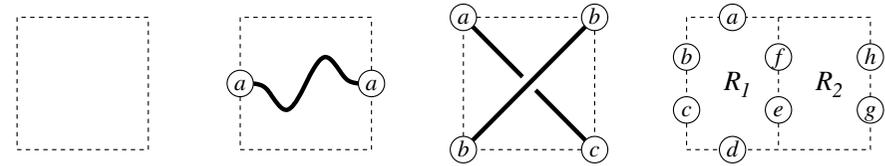
Proposition

Jedes Diagramm hat für jede Eingangsfarbe gleich viele Färbungen:
 Sie unterscheiden sich nur durch eine additive Konstante.

§3.2

45/72

Ein Erhaltungssatz (à la Kirchhoff)



Satz

Entlang jedes Rechtecks ist Wechselsumme aller Farben gleich Null.

Beweis. Die Aussage ist klar in drei elementaren Fällen:

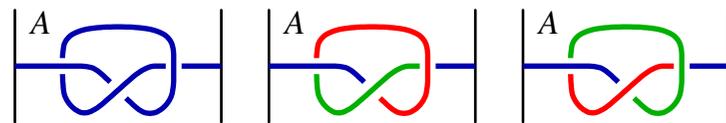
- 1 Das Rechteck ist leer.
- 2 Das Rechteck enthält nur einen Strang ohne Kreuzungen.
- 3 Das Rechteck enthält zwei Stränge, die sich einmal kreuzen.

Jedes Rechteck R können wir in kleinere Rechtecke R_1 und R_2 unterteilen. Gilt die Aussage für R_1 und R_2 , dann auch für R . Durch hinreichend feine Unterteilung erreichen wir die elementaren Fälle. \square

§3.2

46/72

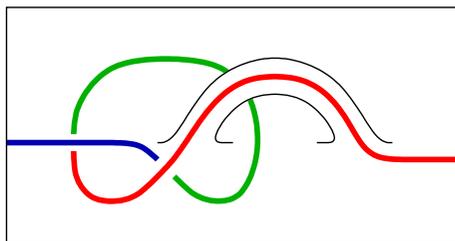
Ein Erhaltungssatz (à la Kirchhoff)



Korollar

Für jede 3-Färbung eines langen Knotens stimmen die Farben des Eingangs und des Ausgangs überein.

Diese Beobachtung gilt in der Ebene, nicht auf beliebigen Flächen!

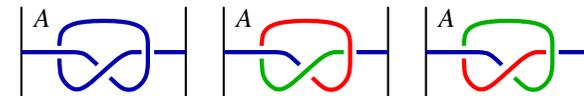


§3.2

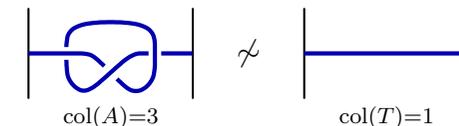
47/72

Gibt es inverse Knoten?

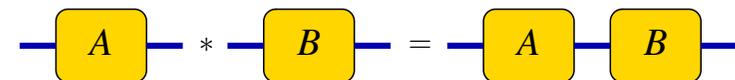
Die Kleeblattschlinge erlaubt genau 3 Dreifärbungen:



Daraus folgt, dass die Kleeblattschlinge nicht trivial ist:



Besser noch: Wir finden $\text{col}(A * B) = \text{col}(A) \cdot \text{col}(B)$.



Aus $A * B = 1$ folgt $\text{col}(A) \cdot \text{col}(B) = 1$, also $\text{col}(A) = \text{col}(B) = 1$.

Das löst unsere ursprüngliche Frage zur „topologischen Jonglage“:
 Zur Kleeblattschlinge gibt es keinen inversen Knoten!

§3.3

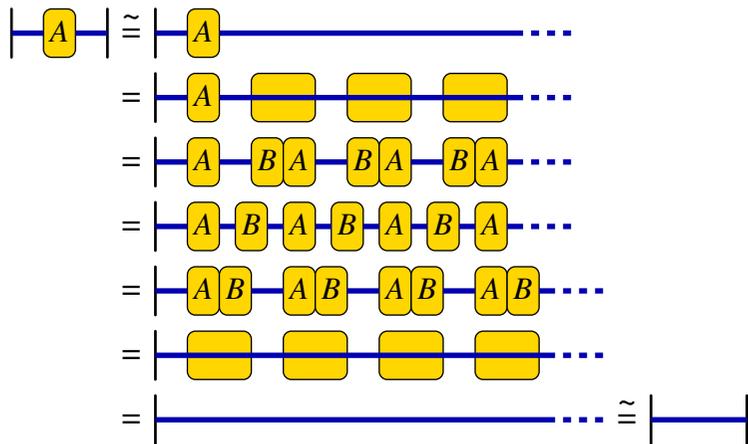
48/72

Mazurs Zauber-Trick

Satz

Für alle Knoten A und B gilt: Aus $A * B = 1$ folgt $A = B = 1$.

Beweis-Idee (nach Barry Mazur 1962) Wir wissen $BA = AB = 1$.



Knoten $\dots \rightarrow$ unendliche Knoten $\dots \rightarrow$ Knoten

§3.3

49/72

Der Mazur-Trick: Beweis oder Schwindel?

Diese wundersame Rechnung gibt es auch für Zahlen.

$$\begin{aligned}
 & 1 \\
 = & 1 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
 = & 1 + (-1+1) + (-1+1) + (-1+1) + \dots \\
 = & 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \\
 = & (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots \\
 = & 0 + 0 + 0 + 0 + \dots \\
 = & 0
 \end{aligned}$$

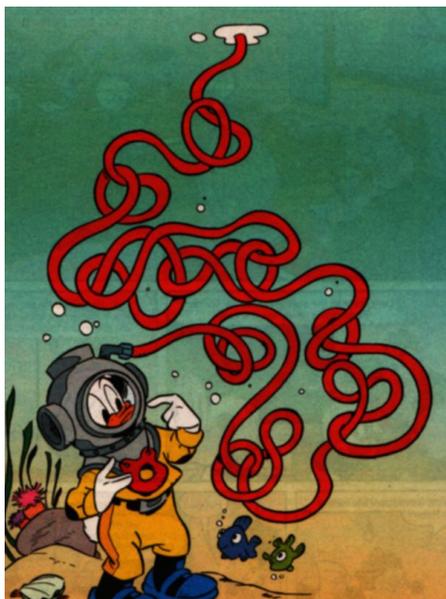
Das darf doch nicht wahr sein! Aber wo liegt der Fehler?

Von unten nach oben gelesen beschreibt diese Gleichung einen beliebten Finanztrick. Angenommen, ich habe heute 0 Euro (erste Spalte) und jeden Tag kommen 0 hinzu (weitere Spalten). Ich kann mir heute einen Euro leihen und sofort zurückzahlen, und das wiederhole ich an jedem Tag. Nun bitte ich um Stundung: ich leihe mir heute einen Euro, den ich erst morgen zurückzahle. An allen weiteren Tagen verfare ich genauso. In der Summe habe ich einen Euro aus dem Nichts gewonnen!

§3.3

50/72

Zerlegung von Knoten



Aus einem Rätselbuch für Kinder: „In Donalds Luftschlauch sind einige Knoten. Wie viele sind es?“

Hierzu muss man zunächst die Frage präzisieren und sodann passende Werkzeuge erstellen:

- Wie lässt sich ein Knoten in Teilknoten zerlegen?
- Gibt es unzerlegbare Knoten? Wie erkennt man diese?
- Ist die Zerlegung eindeutig?

§3.3

51/72

Primfaktorzerlegung von Knoten

Definition

Ein Knoten A heißt *prim* (oder *unzerlegbar*), wenn aus jeder Zerlegung $A = B * C$ stets entweder $B = 1$ oder $C = 1$ folgt.

Z.B. ist die Kleeblattschlinge prim. Es gibt unendlich viele weitere.

Satz (Schubert 1949)

Jeder Knoten ist ein eindeutiges Produkt von Primknoten.

Die natürlichen Zahlen (\mathbb{N}, \cdot) erfreuen sich derselben Eigenschaft!

Korollar

Verknüpfung von Knoten entspricht Multiplikation natürlicher Zahlen.

Produkt von Zahlen \longleftrightarrow Verknüpfung von Knoten

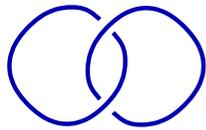
Einselement \longleftrightarrow trivialer Knoten

Primzahlen \longleftrightarrow Primknoten

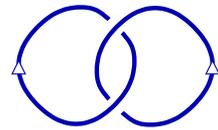
§3.3

52/72

Von Knoten zu Verschlingungen



Hopf-Verschlingung



mit Orientierungen

Wir betrachten geschlossene Knoten und ebene Diagramme. Bei mehreren Komponenten sprechen wir von einer *Verschlingung*. Stattet man jede Komponente mit einer Durchlaufungsrichtung aus, so sprechen wir von einer orientierten Verschlingung. Der Satz von Reidemeister gilt ebenso für (orientierte) Verschlingungen.

Wie zuvor definieren wir den Drall $v: \vec{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{Z}$ als Summe über

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = +1, \quad v\left(\begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array}\right) = -1.$$

Der Drall ist nicht invariant, da er sich unter R1 ändert!

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right) + 1.$$

§4.1

53/72

Die Verschlingungszahl

Der Drall ist jedoch invariant unter R2/R3-Zügen:

$$v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right), \quad v\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = v\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right).$$

Definition

Die Verschlingungszahl $\text{lk}: \vec{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{Z}$ definieren wir durch

$$\text{lk}(D) = \frac{1}{2} \sum_{c \text{ gemischt}} v(c).$$

Summiert wird hier nur über Kreuzungen *verschiedener* Komponenten.

Beispiel: $\text{lk}\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{array}\right) = +1, \quad \text{lk}\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array}\right) = 0.$

§4.1

§4.1

54/72

Die Verschlingungszahl ist eine Invariante.

Proposition

Die Verschlingungszahl $\text{lk}(D)$ ist invariant unter Reidemeister-Zügen.

Beweis. Der R1-Zug bereitet nun keine Probleme mehr:

$$\text{lk}\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = \text{lk}\left(\begin{array}{c} \curvearrowright \end{array}\right).$$

Es bleiben nur die R2- und R3-Züge zu prüfen:

$$\text{lk}\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = \text{lk}\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right), \quad \text{lk}\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) = \text{lk}\left(\begin{array}{c} \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \end{array}\right).$$

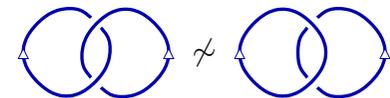
Man sieht die Invarianz durch Aufzählung aller Fälle. \square

§4.1

55/72

Die Verschlingungszahl ist eine Invariante.

Anwendung: Man kann die Hopf-Verschlingung nicht trennen!

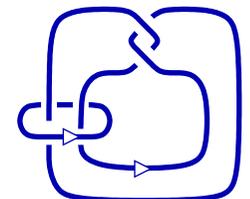


Korollar

Angenommen, $L = K_1 \cup K_2$ besteht aus zwei Komponenten. Gilt $\text{lk}(K_1, K_2) \neq 0$ so lassen sich diese nicht trennen.

Diesen Satz benutzen wir täglich, wenn wir ein Fahrrad anschließen.

! Die naive Umkehrung dieser Aussage ist jedoch falsch: Allein aus $\text{lk}(K_1, K_2) = 0$ folgt noch nicht, dass sich K_1 und K_2 trennen lassen!



§4.1

§4.1

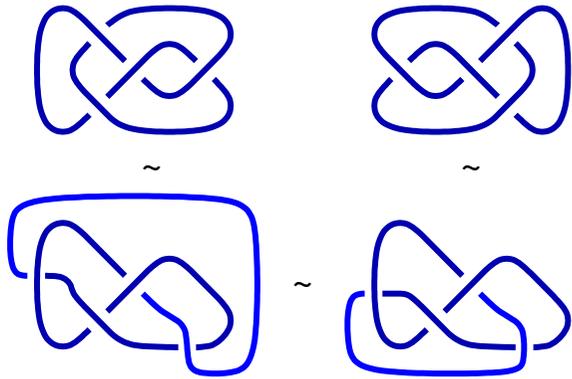
56/72

Der Achterknoten ist amphichiral.

Proposition

Der Achterknoten lässt sich in sein Spiegelbild bewegen.

Beweis. Es genügt, eine Bewegung zu finden, die dies tut.



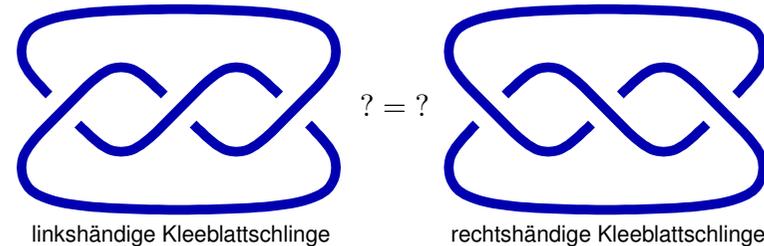
Übung: Man formuliere dies als Folge von Reidemeister-Zügen. \square

§4.2

57/72

Ist die Kleeblattschlinge chiral?

Frage von Listing 1847, gelöst von Dehn 1904:
Lässt sich die Kleeblattschlinge in ihr Spiegelbild bewegen?

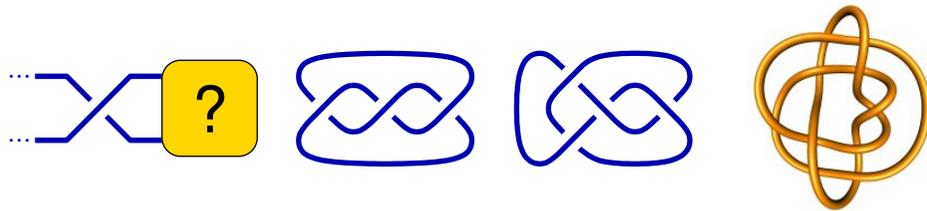


Ausgedehnte Experimente lassen uns vermuten, dass dies nicht möglich ist. Auch hier gilt: Ausgiebiges Scheitern ist kein Beweis für die Unmöglichkeit. Im Folgenden werden wir Invarianten entwickeln, die diese Frage lösen. Die Färbungszahl reicht hierzu leider noch nicht, denn beide Spiegelbilder haben gleiche Färbungszahl. Es wird bequemer sein, im folgenden mit geschlossenen Knoten zu arbeiten.

§4.2

58/72

Reduzierte und alternierende Diagramme



Definition

Ein Diagramm heißt *reduziert*, wenn es keine Einschnürung enthält, und *alternierend*, wenn sich Unter- und Überkreuzungen abwechseln. Ein Knoten heißt *alternierend*, wenn er sich so darstellen lässt.

Reduzierte alternierende Diagramme haben nützliche Eigenschaften:

- Sie erlauben weder reduzierende R1/R2-Züge noch R3-Züge.
- Sie sind somit lokale Minima für die Kreuzungszahl.
- Erste Tait-Vermutung: sogar globale Minima!

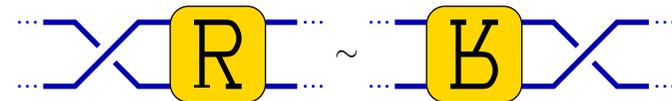
§4.2

59/72

Die Tait-Vermutungen

Peter Guthrie Tait (1831–1901) formulierte folgende Vermutungen und nutzte sie als Arbeitshypothesen zur Knotentabellierung:

- (1) Jedes reduzierte alternierende Diagramm hat minimale Kreuzungszahl (unter allen Diagrammen desselben Knotens).
- (2) Je zwei reduzierte alternierende Diagramme desselben Knotens haben denselben Drall (Summe aller Kreuzungsvorzeichen).
- (3) Je zwei reduzierte alternierende Diagramme desselben Knotens lassen sich durch Flypes ineinander überführen (Klassifikation):



Die Voraussetzung ist wesentlich: Beliebige Diagramme sind weder minimal, noch ist der Drall eine Invariante! Es gilt (3) \Rightarrow (2), denn Flypes ändern weder die Kreuzungszahl noch den Drall. Tait formulierte seine Vermutungen Ende des 19. Jahrhunderts, sie konnten jedoch erst hundert Jahre später bewiesen werden. Wir werden (1) und (2) später mit Hilfe des Jones-Polynoms zeigen können. Auch die Vermutung (3) ist richtig, aber schwerer zu beweisen.

§4.2

60/72

Die Kauffman-Klammer (1987)

Wir wollen jedem Knotendiagramm D eine Zahl $\langle D \rangle$ zuordnen.

Diese Zahl bzw. dieses Polynom soll invariant unter Reidemeister-Zügen sein. Die folgende Konstruktion ist ebenso elementar wie trickreich. Wir beginnen mit Diagrammen ohne Kreuzungen, also einer Ansammlung von Kreisen in der Ebene.

$$\langle \bigcirc \rangle := C, \quad \langle \bigcirc \bigcirc \rangle := C^2, \quad \dots, \quad \langle \bigcirc^n \rangle := C^n.$$

Jede Kreuzung können wir auf zwei Weisen auflösen:

$$\times \rightarrow \succ \text{ oder } \prec.$$

Wir versuchen, $\langle D \rangle$ rekursiv als Linearkombination zu definieren:

$$\langle \times \rangle := A \langle \succ \rangle + B \langle \prec \rangle.$$

Dies ist eine lokale Relation, und A, B, C sind noch unbestimmt.

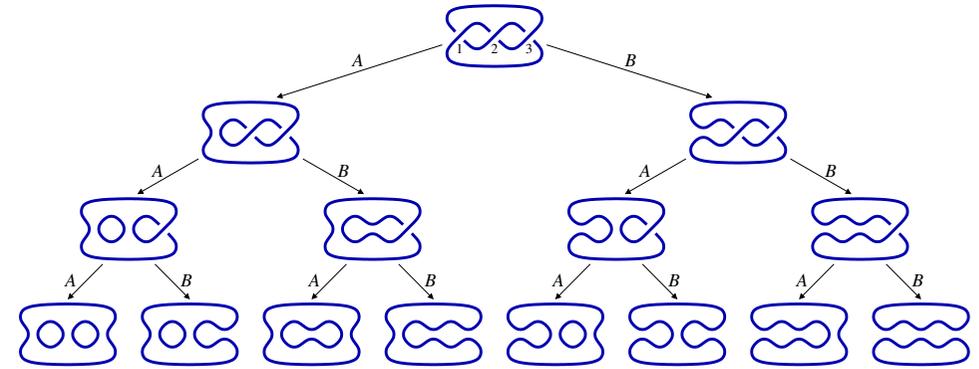
§5.1

61/72

Rekursive Berechnung: ein Beispiel

Wir erhalten eine Abbildung $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{Z}[A, B, C]$, geschrieben $D \mapsto \langle D \rangle$.

Beispiel:



$$A^3 B^0 C^3 + A^2 B^1 C^2 + A^2 B^1 C^2 + A^1 B^2 C^1 \\ + A^2 B^1 C^2 + A^1 B^2 C^1 + A^1 B^2 C^1 + A^0 B^3 C^2$$

§5.1

62/72

Invarianz: Reihenfolge der Auflösung

Die Reihenfolge der Auflösungen ändert nicht das Resultat:

$$\begin{aligned} \langle \begin{array}{c} \times \\ \times \\ 1 \quad 2 \end{array} \rangle &= A \langle \succ \rangle + B \langle \prec \rangle \\ &= AA \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + AB \langle \succ \rangle + BA \langle \prec \rangle + BB \langle \times \times \rangle \end{aligned}$$

In umgekehrter Reihenfolge erhalten wir:

$$\begin{aligned} \langle \begin{array}{c} \times \\ \times \\ 2 \quad 1 \end{array} \rangle &= A \langle \succ \rangle + B \langle \prec \rangle \\ &= AA \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + AB \langle \prec \rangle + BA \langle \succ \rangle + BB \langle \times \times \rangle \end{aligned}$$

Kommutativität $AB = BA$ garantiert hier die Gleichheit.

Somit ist $\langle D \rangle$ wohldefiniert. Auch invariant?

§5.1

63/72

Invarianz unter R2-Zügen

Betrachten wir zunächst einen R2-Zug:

$$\langle \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle$$

Die Kauffman-Klammer ergibt hier

$$\begin{aligned} \langle \begin{array}{c} \times \\ \times \end{array} \rangle &= AA \langle \succ \rangle + AB \langle \bigcirc \bigcirc \rangle + BA \langle \prec \rangle + BB \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle \\ &= (AA + BB + ABC) \langle \succ \rangle + BA \langle \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \rangle. \end{aligned}$$

Invarianz erhalten wir für $AB = 1$ und $A^2 + B^2 + ABC = 0$.

Wir verlangen also fortan $B = A^{-1}$ und $C = -A^2 - A^{-2}$.

Statt drei Unbestimmten A, B, C bleibt also nur noch A .

§5.1

64/72

Invarianz unter R3-Zügen

Als nächstes betrachten wir einen R3-Zug:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{Diagram 2} \rangle$$

Die Kauffman-Klammer ergibt links

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = A \langle \text{Diagram 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle,$$

und rechts

$$\langle \text{Diagram 2} \rangle = A \langle \text{Diagram 5} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 6} \rangle.$$

Beide sind gleich! (Wir nutzen hier den R2-Zug.)

§5.1

65/72

Invarianz unter R1-Zügen

Schließlich betrachten wir einen R1-Zug:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle \stackrel{?}{=} \langle \text{Diagram 2} \rangle$$

Die Kauffman-Klammer ergibt hier

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A \langle \text{Diagram 3} \rangle + A^{-1} \langle \text{Diagram 4} \rangle \\ &= [A(-A^2 - A^{-2}) + A^{-1}] \langle \text{Diagram 2} \rangle = -A^3 \langle \text{Diagram 2} \rangle. \end{aligned}$$

Ebenso finden wir

$$\begin{aligned} \langle \text{Diagram 1} \rangle &= A^{-1} \langle \text{Diagram 3} \rangle + A \langle \text{Diagram 4} \rangle \\ &= [A^{-1}(-A^2 - A^{-2}) + A] \langle \text{Diagram 2} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Diagram 2} \rangle. \end{aligned}$$

Invarianz gilt hier nicht: Wir erhalten einen Faktor $-A^{\pm 3}$.

§5.1

66/72

Von der Kauffman-Klammer zum Jones-Polynom

Lemma

Jedem unorientierten Diagramm D ordnen wir $\langle D \rangle$ zu:

$$\langle \text{Crossing} \rangle = A \langle \text{Right} \rangle + A^{-1} \langle \text{Left} \rangle \quad \text{und} \quad \langle \text{Circle}^n \rangle = (-A^2 - A^{-2})^n.$$

Dies ist invariant unter R2- und R3-Zügen:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = \langle \text{Diagram 2} \rangle, \quad \langle \text{Diagram 3} \rangle = \langle \text{Diagram 4} \rangle.$$

Jeder R1-Zug produziert einen Faktor:

$$\langle \text{Diagram 1} \rangle = -A^3 \langle \text{Diagram 2} \rangle, \quad \langle \text{Diagram 3} \rangle = -A^{-3} \langle \text{Diagram 4} \rangle.$$

Zur Korrektur nutzen wir den Drall orientierter Diagramme:

$$v(\text{Diagram 1}) = v(\text{Diagram 2}) + 1, \quad v(\text{Diagram 3}) = v(\text{Diagram 4}) - 1.$$

§5.2

67/72

Von der Kauffman-Klammer zum Jones-Polynom

Zu jedem orientierten Diagramm D definieren wir das Jones-Polynom

$$J(D) := (-A^3)^{-v(D)} \cdot \langle D \rangle.$$

Satz

Dies ist invariant unter allen drei Reidemeister-Zügen. □

Das Jones-Polynom ist invariant unter Reidemeister-Zügen, hängt also nicht vom gewählten Diagramm ab. Es ist eine Invariante des Knotens bzw. der Verschlingung, und bleibt unter Bewegung unverändert!

§5.2

68/72

Anwendung auf die Kleeblattschlinge

Wir betrachten erneut die beiden Kleeblattschlingen:



Der Drall ist hier $v(D) = -3$ und $v(D^*) = +3$.

Unsere Rechnungen ergeben $\langle D \rangle = A^{-7} + A^{-3} + A^1 - A^9$.

Somit $J(D) = (-A^3)^{-v(D)} \langle D \rangle = -A^2 - A^6 - A^{10} + A^{18}$.

Für das Spiegelbild gilt $\langle D^* \rangle = A^7 + A^3 + A^{-1} - A^{-9}$.

Somit $J(D^*) = (-A^3)^{-v(D^*)} \langle D^* \rangle = -A^{-2} - A^{-6} - A^{-10} + A^{-18}$.

Folgerung

Dies zeigt $D \not\sim D^*$: Die Kleeblattschlinge ist chiral!

Übung: Man rechne diese beiden Beispiele genau nach.

§5.2

69/72

Zusammenfassung

Wir können mit Zöpfen rechnen wie mit Zahlen. \rightarrow *Gruppe*.

Der Drall veranschaulicht das Phänomen des Spin. \rightarrow *Invariante*.

Auch mit Knoten können wir rechnen. \rightarrow *Monoid*.

Es existiert keine Inverses (zur Kleeblattschlinge). \rightarrow *Invariante*.

Die Identifikation / Unterscheidung von Diagrammen ist schwierig.

Die Tait–Vermutungen lösen dies für alternierende Diagramme.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm/lehre/2017/Geometrische-Topologie

§6.0

70/72

Übungsaufgaben

(1) Überführen Sie den Achterknoten in sein Spiegelbild mittels einer Folge von Reidemeister–Zügen. Geht das auch mittels Flypes?

(2) Bestimmen Sie die Anzahl der 3–Färbungen des Achterknotens. (Allgemeiner: Definieren und zählen Sie 5–Färbungen.)

(3) Berechnen Sie das Jones–Polynom der beiden Kleeblattschlingen und des Achterknotens. Welche Symmetrie beobachten Sie?

(4) Klassifizieren Sie alle Knoten (allgemeiner: Verschlingungen) mit bis zu vier Kreuzungen. Welche Werkzeuge benötigen Sie?

Vergleichen Sie mit dem Knoten Atlas (katlas.math.toronto.edu).

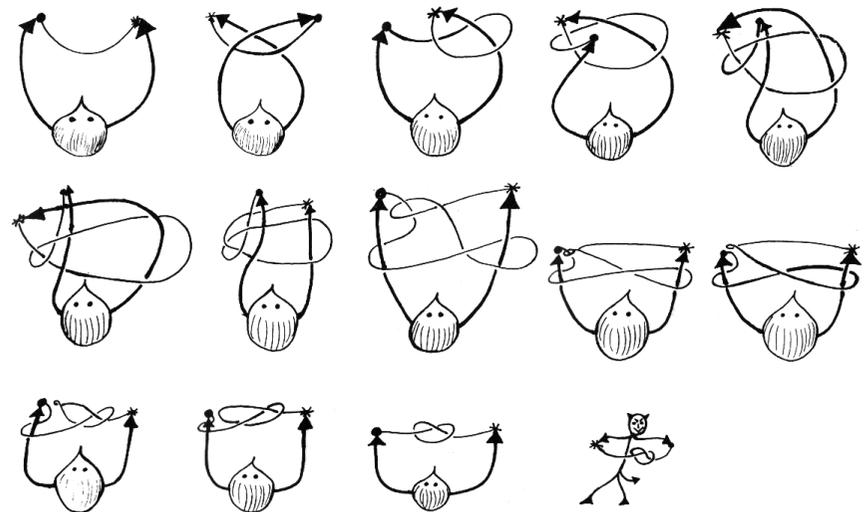
§6.0

71/72

Kauffmans Zaubertrick

Ein Zauberer hält ein unverknotetes Seil an beiden Enden.

Er behauptet, ohne loszulassen das Seil verknoten zu können.



Ist dieses Kunststück auf ehrliche Weise möglich?

§6.0

72/72