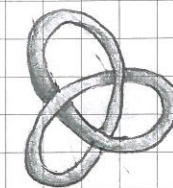
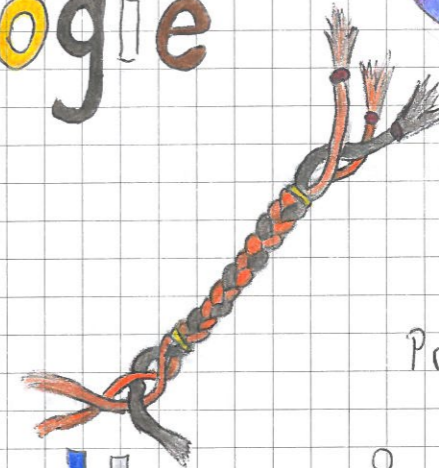
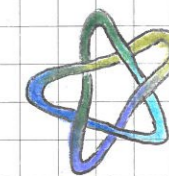
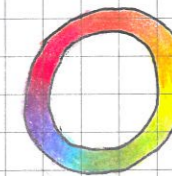


Geometrische

Topologie

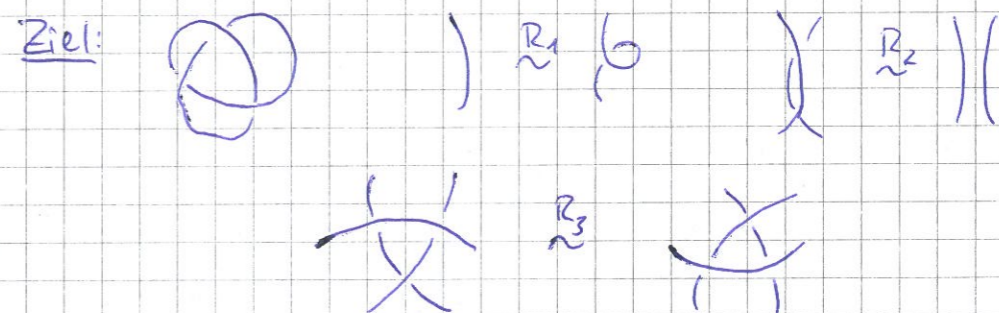
und

Knotentheorie



Prof. Michael Eisermann

Kapitel A : Der Satz von Reidemeister und erste Invariante



Satz: Jeder Knotentyp im \mathbb{R}^3 lässt sich durch ein Knotendiagramm im \mathbb{R}^2 darstellen. Genau dann stellen zwei solche Diagramme denselben Knotentyp dar, wenn sie durch Reidemeisterzüge $R_1/R_2/R_3$ ineinander überführen lassen.

§A1 Polygonale Knoten

Ein Polygonzug $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ im \mathbb{R}^d ist eine Folge $v_0, v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^d$. Gibt man $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$ vor, z.B. $t_k = \frac{k}{n}$, so definiert dies $\gamma_P: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch affine Interpolation:

$$\gamma_P(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} v_{k-1} + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} v_k \text{ für } t \in [t_{k-1}, t_k]$$

P heißt einfach (doppelpunktfrei), wenn $[v_{i-1}, v_i] \cap [v_{j-1}, v_j] = \begin{cases} \{v_i\} & \text{für } j = i+1 \\ \emptyset & \text{für } j \geq i+2 \end{cases} \Leftrightarrow \gamma_P \text{ injektiv}$

P heißt geschlossen, wenn $v_0 = v_n$. Wir erhalten dann $\bar{\gamma}_P: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch $\bar{\gamma}_P(e^{2\pi i t}) = \gamma_P(t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

P heißt einfach geschlossen (doppelpunktfrei), wenn

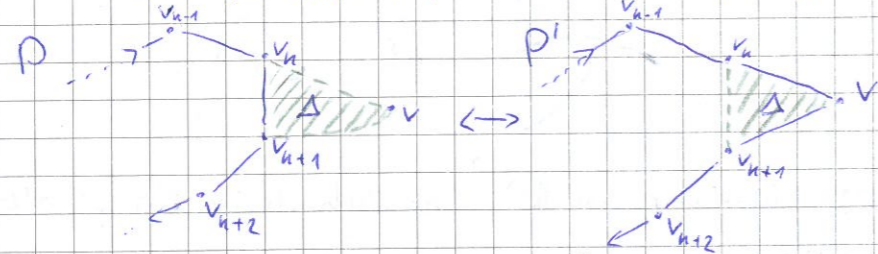
$$[v_{i-1}, v_i] \cap [v_{j-1}, v_j] = \emptyset \text{ für } 1 \leq i < j \leq n. \Leftrightarrow \bar{\gamma}_P \text{ injektiv.}$$

Def: Ein (polygonaler) Knoten in \mathbb{R}^d ist ein einfach geschlossener Polygonzug $P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ in \mathbb{R}^d

Hierzu gehört die Parametrisierung $\bar{y}_P: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^d$ mit
 Bildmenge $K = |P| = [v_0, v_1] \cup [v_1, v_2] \cup \dots \cup [v_{n-1}, v_n] \subset \mathbb{R}^d$

Wir betrachten:

$$P = (v_0, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_n) \leftrightarrow P' = (v_0, \dots, v_n, v, v_{n+1}, \dots, v_n)$$



Wir setzen $\Delta := [v_n, v, v_{n+1}]$ und fordern $|P| \cap \Delta = [v_n, v_{n+1}]$
 und $|P'| \cap \Delta = [v_n, v] \cup [v, v_{n+1}]$

Dies nennen wir einen Δ -Zug (Delta-Zug).

Def: Seien P und P' polygonale Knoten im \mathbb{R}^d

Eine polygonale Isotopie von P nach P' ist eine ^{endlich} Folge von Δ -Zügen $P = P_0 \leftrightarrow P_1 \leftrightarrow P_2 \leftrightarrow \dots \leftrightarrow P_e = P'$

Wir nennen P, P' dann polygonal isotop (oder Δ -äquivalent).

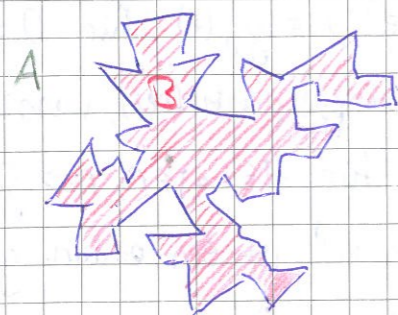
Die Äquivalenzklasse $[P]$ heißt Knotentyp.

Übung: Bestimmen Sie alle Knotentypen in \mathbb{R}^2 und in \mathbb{R}^d für $d \geq 4$. 20.4.15

Def: Ein Knoten $P = (v_1, \dots, v_n)$ in \mathbb{R}^d heißt trivial, wenn P isotop (Δ -äquivalent) ist zu einem Dreieck, d.h. zu $P' = (v_1, v_2, v_3)$.

Beh: Jeder Knoten in \mathbb{R}^2 ist trivial.

Beweis: Das ist die Aussage des (polygonalen) Satzes von Schoenflies

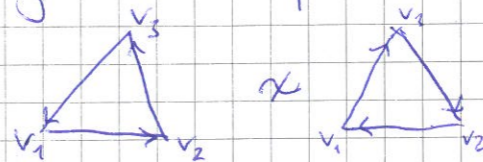


- ① Wir triangulieren B.
- ② Es existieren einklappbare Dreiecke



- ③ Induktion über # Dreiecke.

! In \mathbb{R}^2 gibt es zwei Äquivalenzklassen trivialer Knoten



! Im \mathbb{R}^d mit $d \geq 3$ sind alle trivialen Knoten äquivalent.

! Im \mathbb{R}^d mit $d \geq 4$ sind alle Knoten trivial.

Idee: $\left. \begin{matrix} \triangle \subset A \cong \mathbb{R}^2 \\ \triangle \subset B \cong \mathbb{R}^3 \end{matrix} \right\}$ Wir können im \mathbb{R}^4 ausweichen

Übung: Ein (polygonaler) Knoten P in \mathbb{R}^3 ist trivial gdw. er eine Scheibe berührt, also eine eingebettete simpliziale Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\partial S = |P|$ und $S \cong \mathbb{D}^2$. $|P| \cap S = \emptyset$
 "=>" leicht "=<" wie Schoenflies einklappen!

Beweglichkeit von Knoten

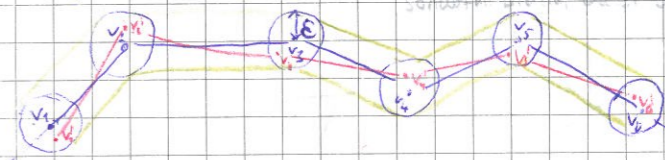
Satz: Sei $P = (v_1, \dots, v_n)$ in \mathbb{R}^d ein polygonaler Knoten.

Dann existiert $\epsilon > 0$ so dass jede Folge $P' = (v'_1, \dots, v'_n)$ in \mathbb{R}^d mit $|v'_i - v_i| < \epsilon$ einen Knoten definiert und $P' \sim P$ gilt.

- (1) $P \sim P + v$ für $v \in \mathbb{R}^d$
 - (2) $P \sim g(P)$ für jede Drehung.
 - (3) $P \sim \lambda P$ für $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0$
- (! Für $\lambda < 0$ gilt dies i.A. nicht!)

Bew: $\epsilon := \frac{1}{2} \min \left\{ \underbrace{d(v_i, v_j)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{(oder Teil ist nur für } n=3 \text{ wichtig)}}} \mid |i-j| \geq 1 \right\} \cup \left\{ \underbrace{d([v_{i-1}, v_i], [v_{j-1}, v_j])}_{> 0} \mid |i-j| \geq 2 \right\}$

Damit gehts:



In dieser Schlauchumgebung vom Radius ϵ um $|P|$ kontrollieren wir alles! Damit $v_i \rightarrow v'_i$ wie in Skizze.

- (1) Wähle $n \in \mathbb{N}$ so groß, dass $|v/n| < \epsilon$. Betrachte $\tau: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto x + v/n$
 $P \sim \tau(P) \sim \tau^2(P) \sim \dots \sim \tau^n(P) = P + v$

(2) Genauso (im Zweifel wg. Äquivalenz: von klein nach groß)

(3) So ähnlich.

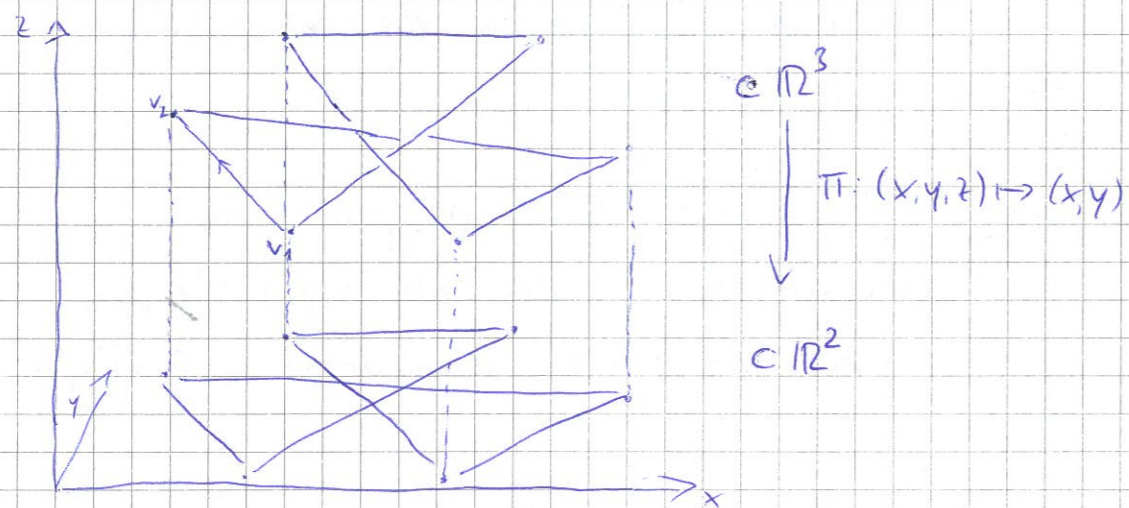
Kor: Die Menge aller Knotentypen im \mathbb{R}^d ist (höchstens) abzählbar.

Bew: Wir betrachten polygonale Knoten mit Ecken in \mathbb{Q}^d . Dies sind abzählbar viele und repräsentieren alle Knotentypen.

Bem: (1) $P = (v_1, v_2, \dots, v_n) \sim P' = (v_2, \dots, v_n, v_1)$

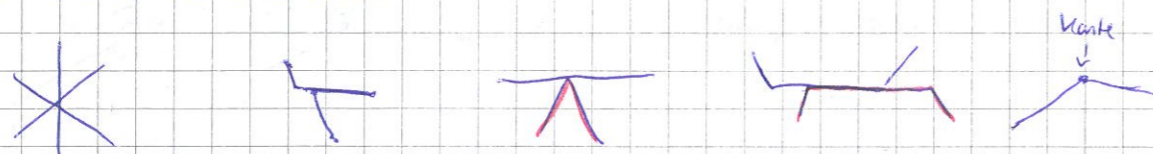
(2) Aus $|P| = |P'|$ in \mathbb{R}^d mit gleicher Orientierung folgt $P \sim P'$. (Übung!)

§A2 Knotendiagramme und der Satz von Reidemeister



Def: Ein Polygonzug $P = (v_1, \dots, v_n)$ in \mathbb{R}^d heißt regulär, wenn $[v_{i-1}, v_i] \cap [v_{j-1}, v_j] \cap [v_{k-1}, v_k] = \emptyset$ für alle $1 \leq i, j, k \leq n$ gilt.

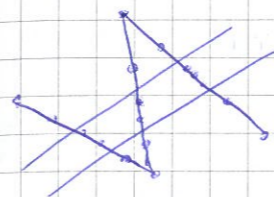
Bem: Nicht erlaubt sind:



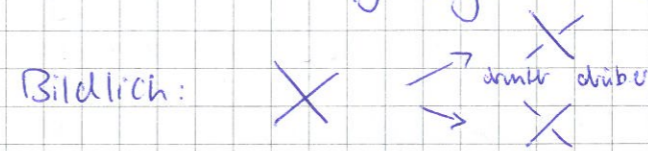
Bem: Durch Einfügen von Zwischenpunkten erreichen wir:

Jede Kante $[v_{i-1}, v_i]$ schneidet neben $[v_{i-2}, v_{i-1}]$ und $[v_i, v_{i+1}]$ höchstens eine weitere Kante $[v_{j-1}, v_j]$ mit $|i-j| \geq 2$.

In diesem Falle schneiden die Nachbarn je nur wie eigenen Nachbarn.



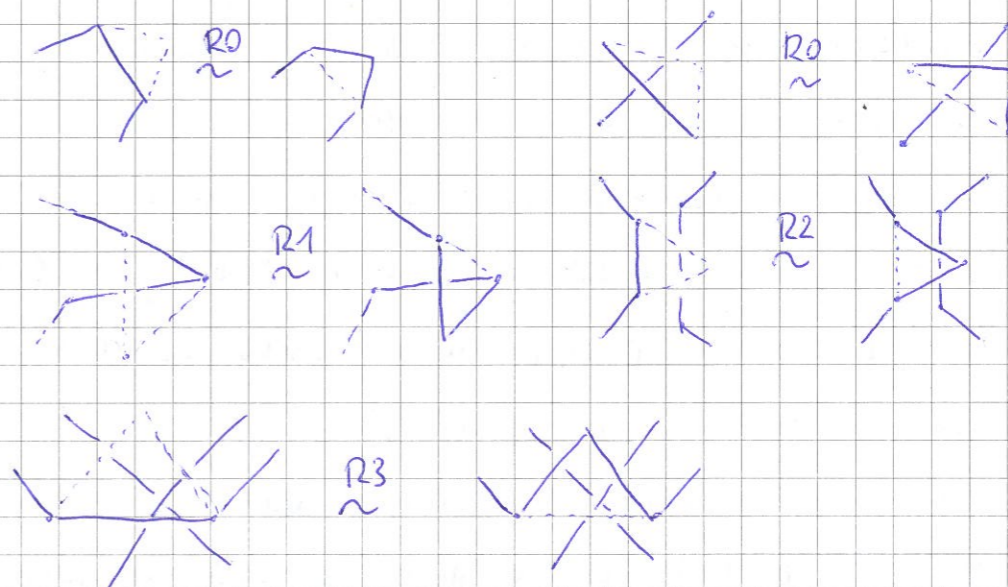
Wenn sich zwei Kanten kreuzen, so wählen wir eine als "drüber", die andere als "drunter". Der reguläre Polygonzug mit diesen Zusatzinfos heißt Diagramm.



Lemma: Zu jedem Knotendiagramm D in \mathbb{R}^2 existiert eine Hochhebung zu einem Knoten P in \mathbb{R}^3 mit $\pi(P) = D$ und in jeder Kreuzung hat die drüberlaufende Kante höhere Z -Koordinate als die drunterlaufende. (Dann ist die Umkehrung möglich.)
Je zwei solche Hochhebungen P, P' zu D sind isotop (= Δ -äquivalent).

In diesem Sinne stellt jedes Knotendiagramm einen Knotentyp dar.

Reidemeister-Züge für polygonale Diagramme im \mathbb{R}^2



Lemma: Zu jedem Knotendiagramm $D = (v_1, \dots, v_n)$ in \mathbb{R}^2 existiert $\epsilon > 0$ sodass jedes $D' = (v'_1, \dots, v'_n)$ in \mathbb{R}^2 ebenfalls ein Knotendiagramm ist und $D' \stackrel{R0}{\sim} D$ gilt.

- (1) $D \sim D + v$
- (2) $D \sim \varphi(D)$
- (3) $D \sim \delta D$ wie zuvor.

Bew: Ähnlich wie zuvor.

Lemma: Seien D, D' zwei Knotendiagramme in \mathbb{R}^2 und P, P' in \mathbb{R}^3 Hochhebungen. Aus $D \stackrel{R}{\sim} D'$ folgt $P \stackrel{\Delta}{\sim} P'$. Beweis: Reidemeister Züge

Def: Zu P in \mathbb{R}^3 heißt keine Projektionsrichtung $v \in S^2$ regulär, wenn $\pi_v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \langle v \rangle^\perp \cong \mathbb{R}^2$ den Knoten P regulär projiziert, d.h. $D = \pi(P)$ ist regulär, andernfalls singular.

Lemma: Die Menge der singulären Richtungen zu P besteht aus endlich vielen Punkten und Kurven auf S^2 . Ihr Komplement, die Menge aller regulären Richtungen, ist dannach offen und dicht.

22.4.15

Lemma Bew: Drei Fälle singulärer Richtungen: $v \in S^2$:

(1) Eine Kante $[v_{i-1}, v_i]$ wird auf einen Punkt projiziert
 $\Leftrightarrow v \in \frac{\mathbb{R}(v_i - v_{i-1})}{\|v_i - v_{i-1}\|} \cap S^2 = \{\pm u\} \Leftrightarrow v \parallel [v_{i-1}, v_i]$

(2) Ein Punkt v_i und eine Kante $[v_{j-1}, v_j]$ fallen zusammen

$\Leftrightarrow v \in \frac{\mathbb{R}(v_i - v_{j-1})}{\|v_i - v_{j-1}\|} \cap S^2 = \text{Großkreis}$

(3) Drei Kanten schneiden sich in einem Punkt.

O.E. seien die Geraden paarw. windschief. (sonst (2)).

Zu $p_1 \in G_1$ existiert höchstens ein $p_2 \in G_2$ sodass $\overline{p_1 p_2} \cap G_3 = \{p_3\}$

Somit parametrisiert $p_1 \in G_1$ eine Geradenfamilie und diese

Richtungen bilden eine Kurve auf S^2 .

(Ausrechnen: Es handelt sich um eine Quadrik.) Glaub ich geht mal

In allen drei Fällen hat die Ausnahmemenge in S^2 ein offenes, dichtes Komplement.

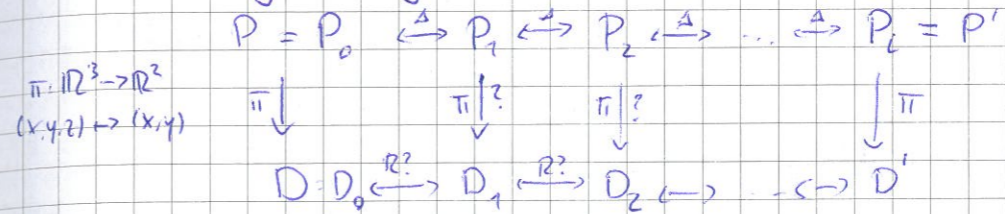
Der endliche Schnitt dieser Komplemente ist offen und dicht.

Satz: (Reidemeister 1926): Genau dann stellen zwei Knotendiagramme D, D' in \mathbb{R}^2 denselben Knotentyp in \mathbb{R}^3 dar, wenn sie Reidemeister-äquivalent sind.

Beweis: Seien P, P' in \mathbb{R}^3 Hochhebungen.

(i) $D \stackrel{R}{\sim} D' \Rightarrow P \stackrel{\Delta}{\sim} P'$ (siehe obiges Lemma)

(ii) Umgekehrt gelte $P \stackrel{\Delta}{\sim} P'$

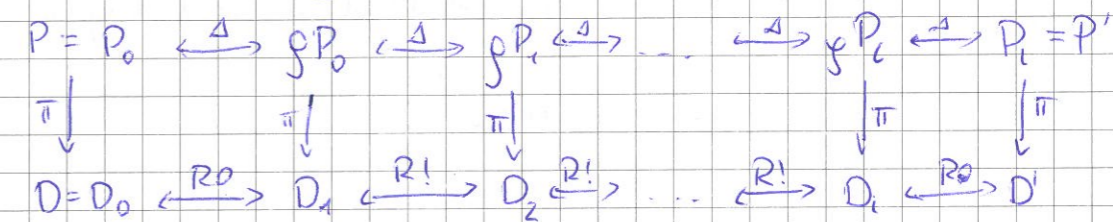


Es existiert eine beliebig kleine Drehung $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass π alle

$g(P_i)$ regulär projiziert. Da Schnitt von abz. vielen offenen dichtem Teilmengen wieder dicht ist (in Baire Raum also auch S^2 oder \mathbb{R}^n)

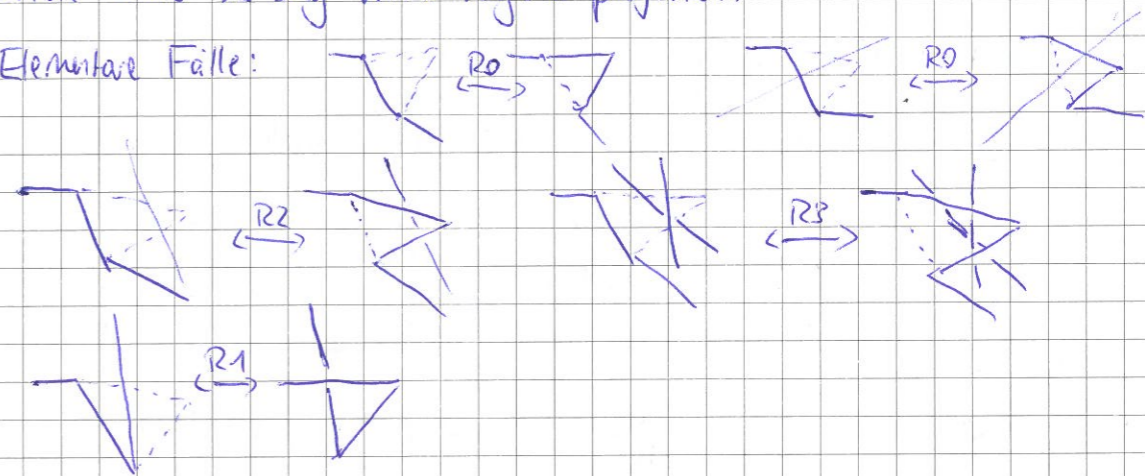
Wir wählen g so klein, dass $\pi(P)$ zu $\pi(g(P))$ RO -äquivalent ist,

ebenso $\pi(P')$ zu $\pi(g(P'))$

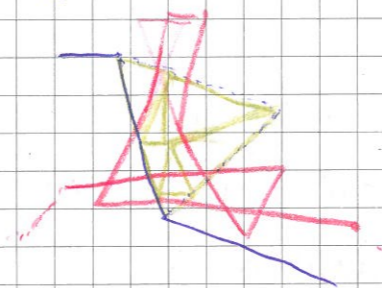


Vorteil: Jeder Δ -Zug wird regulär projiziert.

Elementare Fälle:



Allgemeiner Fall:



Nach Unterteilung in kleine Dreiecke erhalten wir eine Folge elementarer Fälle. //

Anwendung: Dreifärbungen nach Fox

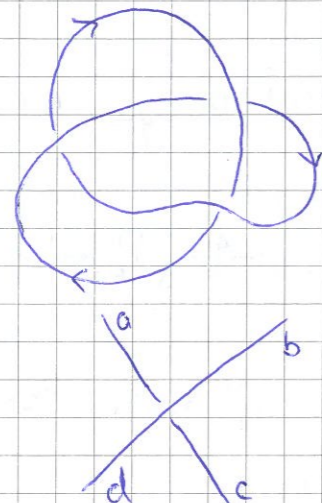
$$|Col_3(O)| = 3, \quad |Col_3(\bigcirc)| = 9, \quad |Col_3(\underbrace{\bigcirc \dots \bigcirc}_n)| = 3^{n+1}$$

R-Invarianz \Rightarrow Invariante von Knotentypen.

Korollar: In \mathbb{R}^3 existieren abh. unendlich viele verschiedene Knotentypen!

Verallgemeinerung zu p-Färbungen

Sei $p \geq 3$ ungerade (später: p prim)



Färbungen von D :

$$F: \text{Stränge von } D \rightarrow \mathbb{Z}/p$$

mit folgender Kreuzungsbedingung:

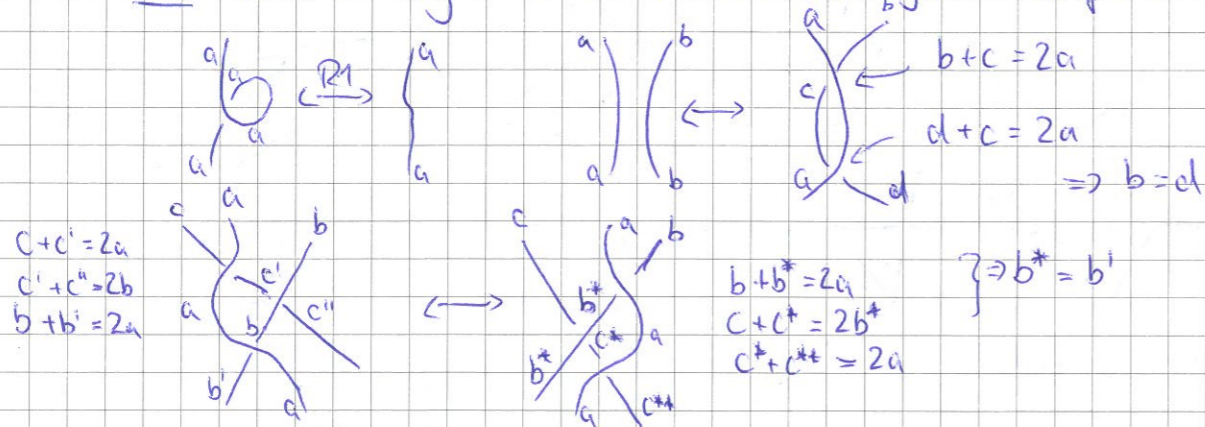
$$b = d$$

$$a - b + c - d = 0$$

$$(\Leftrightarrow a + c = 2b)$$

Sei $Col_p(D)$ die Menge dieser Färbungen

Satz: Jeder R-Zug $D \rightarrow D'$ induziert eine Bijektion $Col_p(D) \leftrightarrow Col_p(D')$



$$c'' = 2b - c' = 2b - 2a + c$$

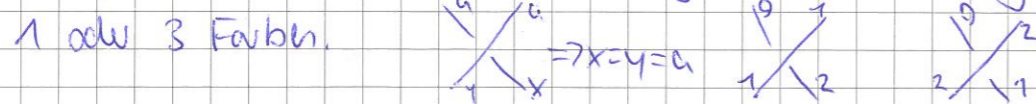
$$c' = 2a - c$$

$$c^* = 2a - c^* = 2a - 2b^* + c = 2b - 2a + c$$

$$c^* = 2b^* - c \quad b^* = 2a - b \quad \Rightarrow c'' = c^*$$

Diese lokale Ersetzung definiert die gewünschte Bijektion.

Bem: Für $p=3$ erhalten wir die vereinfachte Regel: An jeder Kreuzung entweder



$$Col_3(\bigcirc) = 3, \quad Col_5(\bigcirc) = 5^2$$

Prop: Sei p prim. Bezgl. der punktweisen Operationen ist

$Col_p(D)$ ein \mathbb{F}_p -Vektorraum. Für $n = \dim Col_p(D)$

gilt $Col_p(D) \cong \mathbb{F}_p^n$ und $|Col_p(D)| = p^n$.

Def: Für jedes Diagramm D in \mathbb{R}^2 sei $cr(D)$ die Anzahl der Kreuzungen

$$\text{Bsp. } cr(O) = 0, \quad cr(\bigcirc) = 3$$

Sei P ein (polygonaler) Knoten und $[P]$ sein Knotentyp.

Wir setzen $cr([P]) := \min cr(D)$ minimiert über alle darstellbaren

Diagramme D zu $[P]$.

$$\text{Bsp: } cr([O]) = 0, \quad cr([\bigcirc]) = 3$$

$$\infty \sim 0$$

$$\infty \sim 0$$

$$cr([\bigcirc]) = ?$$

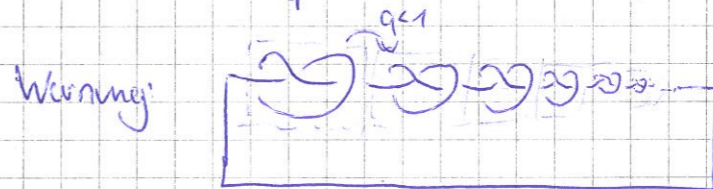
Topologische und glatte Knoten

Def (top. Knoten): Ein topologischer Knoten ist eine Einbettung

$\alpha: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$. Zwei Knoten α, α' heißen isotop, wenn es

eine Isotopie gibt, also $h: [0,1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ stetig,

so dass $h_t: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ $h(t,s) = h_t(s)$ eine Einbettung ist



(wilde Punkt ist topologischer Knoten)

Bislang: polygonaler Knoten / polygonaler Isotopie (modulo)

§ A3 Knoten und Verschlingungen, Schlingen und Zöpfe

Def: Ein topologischer Knoten ist eine Einbettung $\bar{\gamma}: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^d$
 Von $\gamma(t) = \bar{\gamma}(e^{2\pi i t})$ ist dies äquivalent zu $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ skhg
 mit $\gamma(s) = \gamma(t) \Leftrightarrow s-t \in \mathbb{Z}$. Wir nennen diese Knoten glatt,
 wenn $\gamma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$ und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Entsprechend für stückweise glatt. z.B. sind polygonale Knoten
 stückweise glatt.

Def: Eine ^{stetige} Abbildung $h: [0,1] \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ heißt Homotopie.

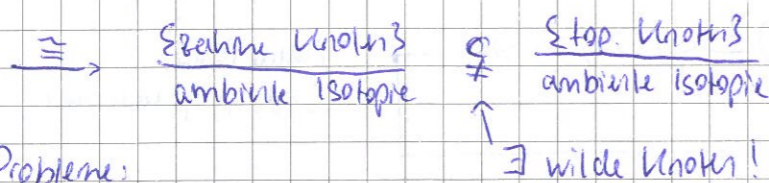
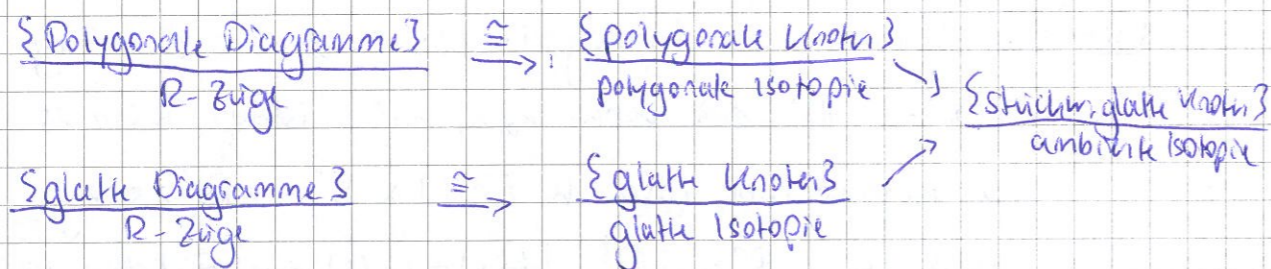
Wir definieren $h_t: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^d$ durch $h_t(s) = h(t,s)$.

Wir nennen h eine Isotopie, wenn h_t eine Einbettung ist
 für jedes $t \in [0,1]$. Wir nennen $H: [0,1] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$

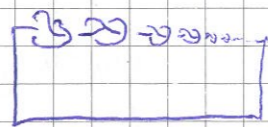
eine Homotopie (ambient Isotopie), wenn H_t ein Homöo-
 morphismus ist für alle $t \in [0,1]$. (Was genau ist der Unterschied?)

Entsprechend glatte Isotopie und Diffeotopie

Alternative Definitionen für Knotentypen



Zwei Probleme:

① Wilde Knoten:  (noch 5-Zahn)

Übung: Es gibt überabzählbar viele
 wilde Knotentypen.

② Isotopie ist nicht der richtige Äquivalenzbegriff.

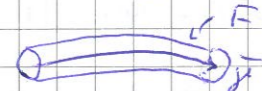


'piece' Dies ist eine Isotopie
 (Übung!)

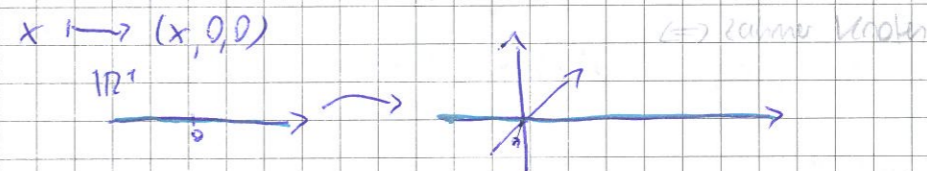
Satz: Für top. Knoten $\bar{\gamma}: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sind äquivalent:

(1) $\bar{\gamma}$ ist ambient isotop zu einem polygonalen Knoten.
 D.h. es existiert eine Homotopie $H: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 mit $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $H_1 \circ \bar{\gamma}$ polygonal.

(2) $\bar{\gamma}$ erlaubt eine Tubenumgebung $F: S^1 \times \mathbb{B}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
 mit $\bar{\gamma}(s) = F(s,0)$



(3) $\bar{\gamma}$ ist lokal flach, d.h. lokal homöomorph zu $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$,



Bew: (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) klar. (3) \Rightarrow (1) mühsam // Übung?

Für polygonale Knoten $K = |P|$ und $K' = |P'|$ sind äquivalent:

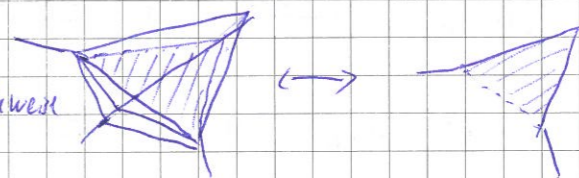
(a) P und P' sind polygonal isotop (A-Züge)

(b) Es existiert eine Homotopie $H_t: [0,1] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
 mit $H_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ und $H_1(K) = K'$ (ambient Isotopie).

(c) Es existiert ein orientierungstreuender Homöo $h: \mathbb{R}^3 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^3$
 mit $h(K) = K'$.

Bew: (a) \Rightarrow (b)

leicht, sogar mit stückweise
 affinen Homotopie



(b) \Rightarrow (c) trivial mit $h = H_1$.

(c) \Rightarrow (a) mühsam, siehe Burck. Färschung (starke Aussage)

Satz: Für top. Knoten $\bar{\gamma}: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ sind äquivalent:

(1) $\bar{\gamma}$ ist glatt

(2) $\bar{\gamma}$ erlaubt eine glatte Tubenumgebung.

(3) $\bar{\gamma}$ ist lokal diffeomorph zu $\mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, x \mapsto (x,0,0)$

D.h. $\bar{\gamma}(S^1) \subset \mathbb{R}^3$ ist eine glatte Untermannifalt und $\bar{\gamma}: S^1 \rightarrow \bar{\gamma}(S^1)$ ein
 Diffeomorphismus glatter Mfnt. (Wieviele Untermannifalt? von \mathbb{R}^3)

Satz: glatte Isotopie \Leftrightarrow Diffotopie.

(Isotopie - Einbettungssatz von Thom 1957)

Seien M, N glatte Mfak und $h: [0,1] \times M \rightarrow N$ eine glatte Isotopie, die außerhalb eines Kompaktums $M_0 \subset M$ nichts bewegt. Dann kann man h in eine Diffotopie $H: [0,1] \times N \rightarrow N$ einbetten, die außerhalb eines Kompaktums $N_0 \subset N$ nichts bewegt. Das bedeutet

$H_0 = \text{id}_N$ und $h_t = H_t \circ h_0$ für alle $t \in [0,1]$, also $h(t,x) = H(t, h(0,x))$

Bew: Differentialtopologie, siehe Bocklund-Jänich oder Hirsch. Einbetten in Diffotopie

Allgemein statt \mathbb{R}^3 :

Sei M eine 3-Mfak (trianguliert oder glatte)

Bsp: $M = \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ (ein Punkt Kompaktifizierung)



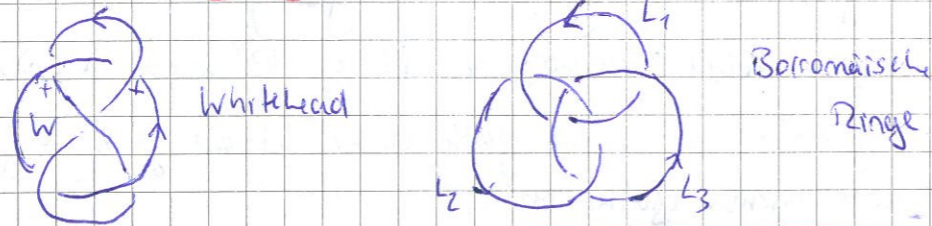
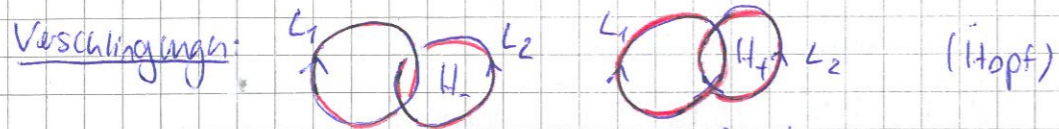
Bsp: Sei F eine Fläche (z.B. Kugel, zshgd: $F \cong F_{g,r}^+$)

z.B. $F = S^2$ oder etc.

$M := F \times [-1, +1]$

Notation: $\mathcal{K}(M) = \frac{\text{Zahl glatte/polygonale Knoten } S^1 \hookrightarrow M}{\text{ambientale Isotopie}}$

(ii): $\mathbb{R}^3 \hookrightarrow S^3$ induziert $\mathcal{K}(\mathbb{R}^3) \xrightarrow{\cong} \mathcal{K}(S^3)$. Aber $\mathbb{R}^2 \hookrightarrow S^2$ induziert $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \mathcal{K}(S^2)$ surjektiv, nicht injektiv.



Alles wie bei Knoten! Insb. haben wir den Satz von Reidemeister für Verschlingungen. Anwendung:

Def: Verschlingungszahl $lk(L_i, L_j)$ für Verschl. $L = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n$ in \mathbb{R}^3



$lk(L_i, L_j) = \frac{1}{2} \sum_{p \in D_i \cap D_j} \epsilon(p)$

In dieser Def. nutzen wir Diagramme. Das Ergebnis ist davon unabhängig.

Bsp: \neq

$lk(H) = -1$ $lk(OO) = 0$

$lk(H_+) = +1$

ii: Kann W getrennt werden? Und B ?

$lk(W) = 0 \Rightarrow$ keine Aussage möglich.

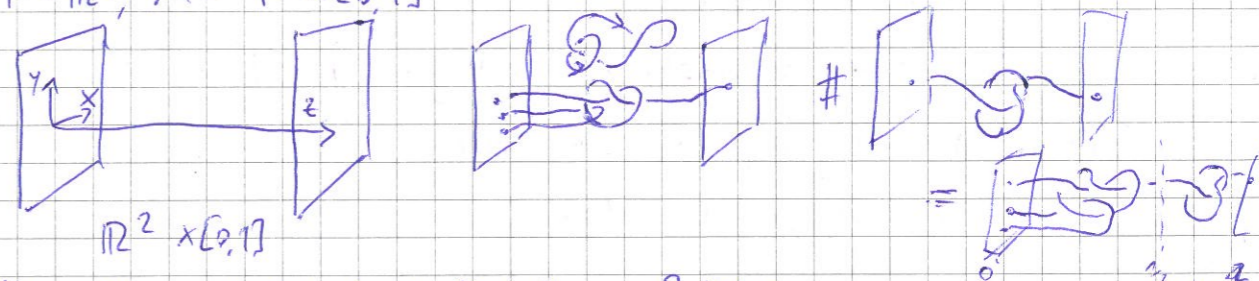


$Col_3(OO) = 9$
 $Col_3(W) = 3$ } $\Rightarrow W \neq OO$

Aufgabe: Verschiedene Färbungen an Borromäischen Ringen ausprobieren.

Schlingel:

$F = \mathbb{R}^2, M = F \times [0,1]$



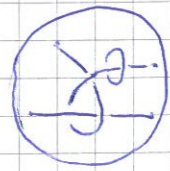
Alles wie zuvor: polygonale Einbettungen & Isotopie.

Geeignet formuliert gilt auch hier der Satz von Reidemeister.

Vorteil: verbundene Summe.

29.4.15

Schlingel: $M, \partial M \supset A, |A| = 2m$



$$f: [0,1] \times \{1, \dots, m\} \cup S^1 \times \{m+1, \dots, m+n\} \hookrightarrow M$$

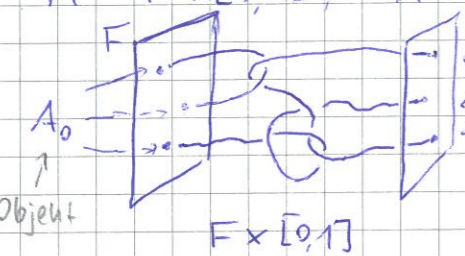
zohm/polygonale/glatte Einbettung

$T = \text{Bild}(f) \subset M$ Untermh. orientiert

$\partial T = T \cap \partial M = A$ (orientiert) wie orientiert? $|A| = 2m$

Speziell: F eine Fläche $(\mathbb{R}^2, \mathbb{D}^2, \mathbb{F}_g)$

$$M = F \times [0,1], \quad A = A_0 \times \{0\} \cup A_1 \times \{1\}, \quad A_0, A_1 \subset F$$



$$\mathcal{S}_F(A_0, A_1) = \frac{\{\text{Schlingel in } (M, A)\}}{\text{ambient Isotopie}}$$

Dies ist eine Kategorie bezüglich der Verknüpfung

$$\# : \mathcal{S}_F(A_0, A_1) \times \mathcal{S}_F(A_1, A_2) \rightarrow \mathcal{S}_F(A_0, A_2)$$

Genau: $\Phi : M \sqcup M = M \times \{1,2\} \rightarrow M$

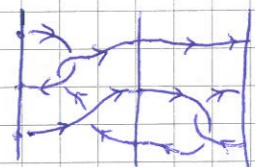
$$(x, 1) \mapsto (x, 1/2)$$

$$(x, 2) \mapsto (x, (1+1)/2)$$

$$[M_1] \sqcup [M_2] \rightarrow [M_1 \sqcup M_2]$$

Für Schlingel $T_1 \subset (M, A_0 \cup A_1), T_2 \subset (M, A_1 \cup A_2)$

$$\text{Setz: } T = T_1 \# T_2 := \Phi(T_1 \times \{1\} \cup T_2 \times \{2\}) \subset (M, A_0 \cup A_2)$$



(falls orientiert müssen die Orientierungen zusammenspassen!)

Bem: Dies ist wohldefiniert modulo Isotopie von $(M, \partial M)$ und wir erhalten eine Kategorie: Objekte sind $A \subset F$, Morphismen sind Schlingeltypen mit Verknüpfung $\#$.

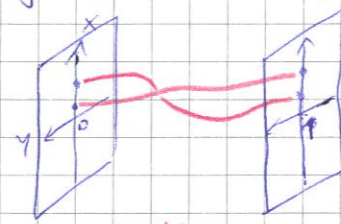
(Nachprüfen: Assoziativ \checkmark , Identität $\uparrow \equiv \text{Id}$)

Speziell: $F = \mathbb{R}^2, p, q \in \mathbb{N}, p+q = 2m$

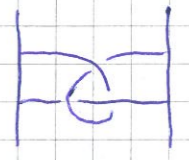
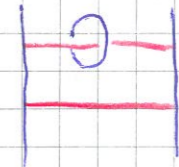
$$A_0 = \{(1,0), (2,0), \dots, (p,0)\}$$

$$A_1 = \{(1,0), (2,0), \dots, (q,0)\} \quad \mathcal{S}_{\mathbb{R}^2} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}^2}(A_0, A_1)$$

Speziell: $p=q=m$, reine Schlingel besteht aus m Intervallen, jedes läuft von $(i,0)$ nach $(i,0)$. Beispiele



nicht rein

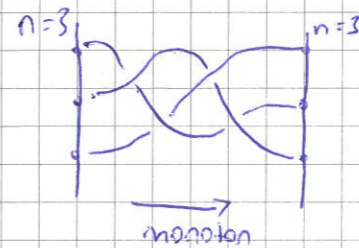


rein

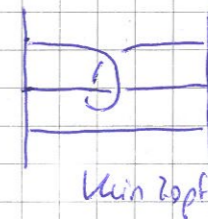
Die Schlingel $\mathcal{S}(m,m)$ bilden ein Monoid, reine Schlingel ein Untermonoid.

Invertierbare Elemente? Zöpfe!

Def: Ein Zopf mit n Strängen ist ein strikt monotoner Schlingel in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ von A_0 nach $A_1, A_0 = A_1 = \{(1,0), (2,0), \dots, (n,0)\}$



monoton



kein Zopf!

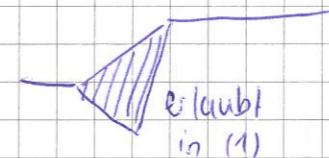
Bem: Jeder Zopf ist invertierbar in $\mathcal{S}(n,n)$.

$$\text{Spiegelung } \gamma : F \times [0,1] \rightarrow F \times [0,1]$$

$$(x, t) \mapsto (x, 1-t)$$

$$\text{Zopf } \beta \Rightarrow \beta \# \gamma(\beta) \sim 1 \quad (\text{Übung!})$$

Bem: (1) Isotopie in der Menge der Zöpfe = Isotopie von Zopf zu Zopf in der Menge der Schlingel. (später?) (2) (Isotopie \Rightarrow ambient Isotopie für Zöpfe!)



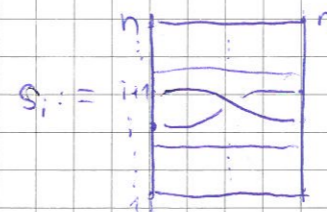
erlaubt in (1)



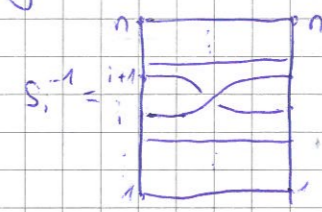
nicht erlaubt in (1) aber in (2)

Satz (Artin 1925) n -Zöpfe in $\mathbb{R}^2 \times [0,1]$ wie oben bilden eine Gruppe B_n .

Diese wird erzeugt von den elementaren Zöpfen



$$S_i :=$$



$$S_i^{-1} :=$$

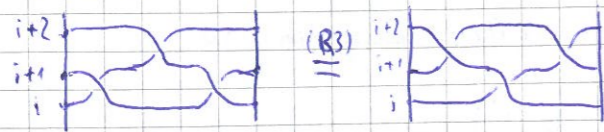
$$\text{Neben } S_i S_i^{-1} = S_i^{-1} S_i = 1$$

gelln die elementaren

$$\text{Relationen } \equiv \text{A} \rightarrow \text{B} \quad (22)$$

$$S_i S_{i+1} S_i = S_{i+1} S_i S_{i+1} \quad \text{für } i=1, 2, \dots, n-2$$

$$s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \text{ für } i=1, \dots, n-2$$



$$s_i s_j = s_j s_i \text{ für } |i-j| \geq 2$$



Die elementaren Relationen erzeugen alle

Relationen, d.h.:

$$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{array}{l} s_i s_j = s_j s_i \text{ für } |i-j| \geq 2 \\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1} \end{array} \rangle$$

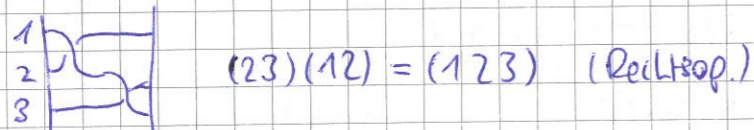
Beweis: Wir verfahren wie im Beweis des Satzes von Reidemeister für Knoten, hier angewendet auf Zöpfe.

- polygonale Zöpfe, polygonale Isotopie zw. Zöpfen
- Reguläre Projektion $\Rightarrow s_{i+1} \rightarrow s_{i+1}$ erzeugen
- Δ -Züge entsprechen R_0, R_2, R_3 (hier R_1 nicht möglich)
 \Rightarrow elem. Relationen erzeugen alle Relationen //

Übung! (Wiederholen & Anpassen)

Bem: Wir haben einen Gruppenhom. von B_n auf die symmetrische Gruppe

$$S_n = \{ \sigma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \text{ bijektiv} \}$$

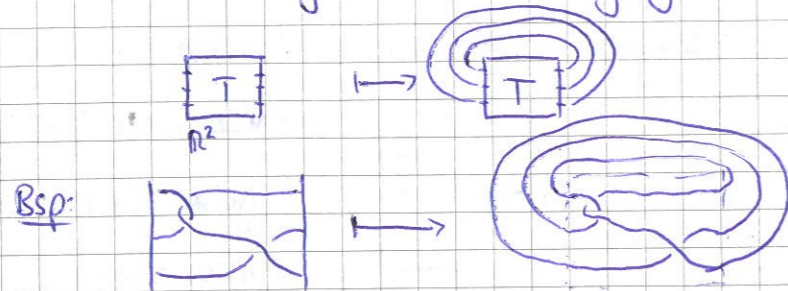


$$\text{Bem: } S_n = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_{1, \dots, n-1} \\ \sigma_i = (i, i+1) \end{array} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \text{ für } |i-j|=1 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ für } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i^2 = 1 \end{array} \right\rangle \text{ (Übung!?)}$$

Verbindliche Summe von Knoten

$$\text{Abschluss } cl: \mathcal{T}(n, n) \rightarrow \mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$$

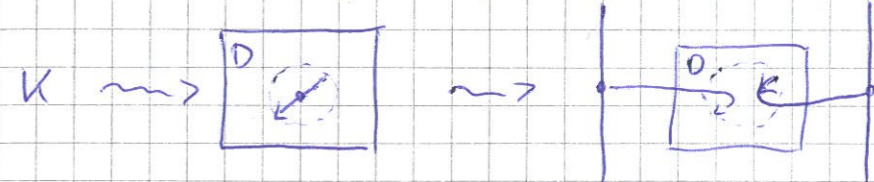
Schlingel \mapsto Verschlingung



Bem: Wohldef. modulo Isotopie

Satz: Speziell $cl: \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1) \rightarrow \mathcal{K} = \mathcal{K}(\mathbb{R}^3)$ ist eine Bijektion.

Bew: Stelle Knoten im \mathbb{R}^3 polygonal dar, dann als Diagramme, mache einen Punkt.



$$cl(T) = \text{Diagram of a knot in a box} \sim D$$

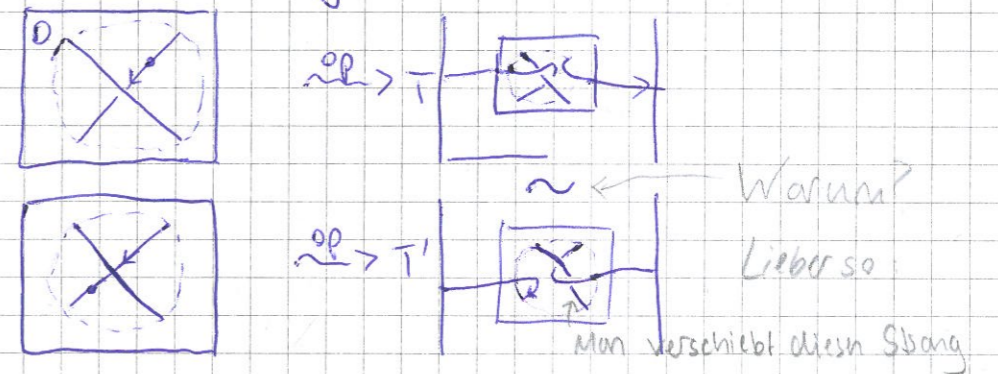
Dies zeigt Surjektivität.

Genauer: Wir haben $op: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1)$

Konstruktion: $D \rightarrow \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1)$ wie oben. $D \mapsto T$.

R-Züge auf D weg von Markierung \rightsquigarrow Δ -Züge für T

Verschieben der Markierung



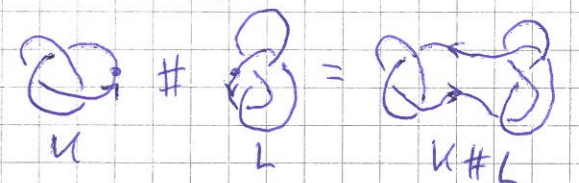
Damit ist $op: \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1)$ wohldef.

Wir sehen $cl \circ op = id_{\mathcal{K}}$ und $op \circ cl = id_{\mathcal{T}}$



Damit erklären wir die verbindliche Summe:

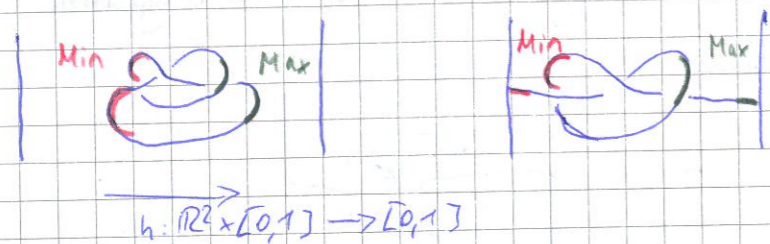
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K} \times \mathcal{K} & \xrightarrow{\#} & \mathcal{K} \\ \downarrow op & & \downarrow op \\ \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1) \times \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1) & \xrightarrow{\#} & \mathcal{T}_{\text{rein}}(1,1) \end{array}$$



Bem: $cr([K] \# [L]) \leq cr([K]) + cr([L])$

Offene Frage: Gilt immer Gleichheit?

Brückenzahl:



$br: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$

$br([K]) = \min \# \{ \text{Minima von } K' \sim K \}$

Etwas allgemeiner: $br: \mathcal{T}(1,1) \rightarrow \mathbb{N}$

$br([T]) = \min \# \{ \text{Minima im Inneren von } T' \sim T \}$

Bem: $br([\partial(T)]) = 1 + br(T)$

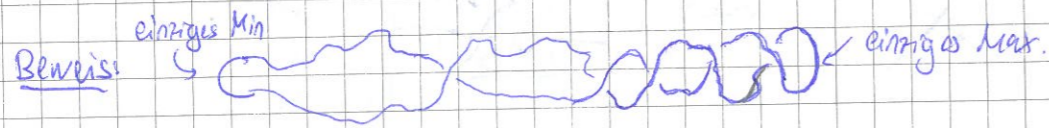
Bsp: $br([O]) = 1$

$br([\text{Knoten}]) = 2$

" \leq " klar dank Zeichnung.

" \geq " dank folgender Bem:

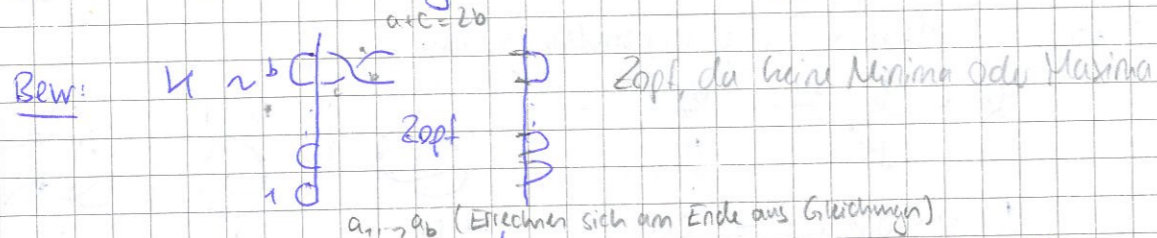
Bem: Für $[K] \in \mathcal{K}$ gilt $br([K]) = 1 \Leftrightarrow K \sim O$.



Stelle K durch ein Diagramm D mit $cr(D) = 1$ dar.

Dann $D \stackrel{R^1}{\sim} O$ Links Min, rechts Max, dazwischen monoton! (2-Zopf)

Satz: Für $[K] \in \mathcal{K}$ gilt $1 \leq \dim \text{Colp}(K) \leq br(K)$



Wähle Eingangsformeln $\in \mathbb{F}_p^b$. Diese propagieren sich nach rechts.

Am Ende liefert jedes Max eine Gleichung.

Bsp $br([\text{Knoten}]) = 1+n$

Bew: " \leq " dank Zeichnung

" \geq " dank $\dim \text{Colp} = 1+n$.

Satz: (Schubert 195?)

$br(K \# L) = br(K) + br(L) - 1$ (ein Randminimum geht verloren)

Schöner: $br(-[K] - \# -[L]) = br(-[K]) + br(-[L])$

Bew: " \leq " klar " \geq " mühsam (hier nicht ausgeführt)

Kor: Jeder Knoten ist verbindene Summe von Primknoten!

Def: Ein Knoten (typ) $K \in \mathcal{K}$ heißt prim, wenn aus $K = A \# B$ stets folgt entweder $A \sim O$ oder $B \sim O$.

Bew: Induktion über $n = br(K)$

$n=1 \Rightarrow K \sim O$, also leere Summe, $n=2 \Rightarrow K$ prim.

$n \geq 2$ i) K prim \Rightarrow fertig

ii) $K = A \# B, A \not\sim O \not\sim B$

$$\underbrace{br(K)}_{=n} = \underbrace{br(A)}_{\geq 1} + \underbrace{br(B)}_{\geq 1}$$

$\Rightarrow br(A), br(B) < br(K) = n$.

Dann per Induktion: $A = P_1 \# \dots \# P_h$ alle Prim
 $B = Q_1 \# \dots \# Q_l$

Damit $K = P_1 \# \dots \# P_h \# Q_1 \# \dots \# Q_l$

Bem: Eindeutigkeit? Später!

Entknotungszeit

Für Knoten K, K'



$u(K, K') = \min \# \{ \text{Kreuzungswechsel von } K \text{ nach } K' \}$

$u(K) := u(K, O)$

Bsp: $u(K, K') = 0 \iff K \sim K'$

$u(\bigcirc) = 1$

" \leq " $\bigcirc \rightarrow \bigcirc \sim 0$ " \geq " dank $\bigcirc \neq 0$

$u(\bigcirc \# \bigcirc) \stackrel{?}{=} 2$

" \leq " klar " \geq "?

Offene Frage: Gilt stets $u(K \# L) = u(K) + u(L)$?

Allgemein unbekannt, hier Spezialfall:

Satz Sei $f: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}$, $f(K) = \dim \text{Colp}(K)$

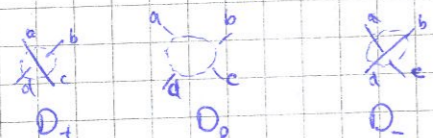
Bei jeder Entknotungsoperation $X_{u+} \leftrightarrow X_u$ gilt

$|f(K_+) - f(K)| \leq 1$

$\bigcirc_{u+} \sim \bigcirc_u$

Anwendung: Oben gilt $f=3$, also $u=2$

Bew: Betrachte drei Diagramme, die sich nur an einer Stelle unterscheiden



Relationen: $a-b+c-d=0$ ditto $a=c$ (sonst nicht) $b=d$

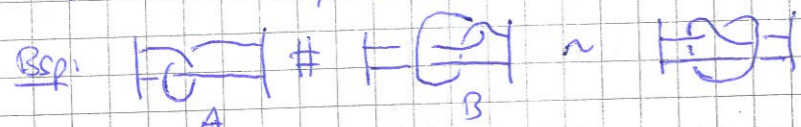
$\text{Colp}(D_+) \subset \text{Colp}(D_0) \supset \text{Colp}(D_-)$
 \uparrow \uparrow
 $\text{Kodim} \leq 1$ $\text{Kodim} \leq 1$

Kor: $u(\bigcirc \# \bigcirc \# \dots \# \bigcirc) = n$

u additiv?

u multiplikativ?

br additiv? Ja, für Knoten aber nicht für $(S(2,2), \#)$



$br(A) = 1$ (ohne Randextrema)

Bew: " \leq " klar, " \geq "? A kein Zopf! (ist wie Kleblattschlinge) Übung!

$br(B) = 1$

Bew: " \leq " klar, " \geq "? B kein Zopf (Übung) (Strang 2 vergessen \rightarrow Isotopie f. Kleblattschlinge)



$A \# B$

Ein Min-Max-Paar löscht sich aus!

Nachtrag zu Zöpfen:

Arten: $P_n \hookrightarrow B_n \xrightarrow{\pi_n} S_n$
reine Zopfgruppe Zopfgruppe symmetrische Gruppe

Stränge hinzufügen & vergessen:

$l_n: B_{n-1} \hookrightarrow B_n$ $\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$

$r_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$ $\begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \mapsto \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix}$

Dies sind Gruppenhomom.

$r_n \circ l_n = \text{id}_{P_{n-1}}$

Kern von $r_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$

Prop: $\text{Ker}(r_n)$ wird frei erzeugt von $a_{n-1, n} \rightarrow a_{n-1, n}$



Bew: $\text{Ker}(r_n) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{n-1 \text{ Punkte}\}, \#)$
 $=: F_{n-1}$

n -te Punkt
 Auf diesem Punkt sitzt die Fundamentalguppe

Wir haben $F_{n-1} \hookrightarrow P_n \xrightarrow{r_n} P_{n-1}$ spaltend

Ander formuliert: $P_n = F_{n-1} \rtimes P_{n-1}$ semidirektes Produkt

Bsp: $P_1 = S_1$, $P_2 = \langle S_1^2 \rangle = F_1 \cong \mathbb{Z}$, $P_3 = F_2 \rtimes F_1$

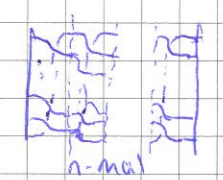
$P_n = F_{n-1} \rtimes (F_{n-2} \rtimes (\dots (F_2 \rtimes F_1) \dots))$

Zentrum $Z(G) := \{z \in G \mid za = az \text{ für alle } a \in G\}$

Satz: Im Zentrum von P_n liegt der reine Zopf $z_n = (s_1 s_2 \dots s_{n-1})^n$

Dieser erzeugt das Zentrum, genauer $Z(P_n) = \langle z_n \rangle \cong \mathbb{Z}$ (für $n \neq 2$)

$Z(B_n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{für } n=2 \\ \langle z_n \rangle \cong \mathbb{Z} & \text{für } n \neq 2 \end{cases}$



Kor: Die Zopfgruppen B_n sind untereinander nicht isomorph, denn in der Abelschmachtung $\alpha_n: B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ gilt $\alpha_n(Z(B_n)) = n(n-1)\mathbb{Z}$ (6.5.15)

Das Zentrum der Zopfgruppe - ausführlicher

Übung (1) $Z(S_n) = \begin{cases} S_2 \cong \mathbb{Z}/2 & \text{für } n=2 \\ 1 & \text{für } n \neq 2 \end{cases}$

(2) $Z(F_n) = \begin{cases} F_1 \cong \mathbb{Z} & \text{für } n=1 \\ 1 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$

(3) Sei $h: G \rightarrow H$ surj. Gruppenhomomorphismus
Dann gilt $h(Z(G)) \subset Z(H)$.

Satz: Im Zentrum von B_n liegt $z_n = (s_1 s_2 \dots s_{n-1})^n$
Es gilt $Z(P_n) = \langle z_n \rangle$ und $Z(B_n) := \begin{cases} B_2 \cong \mathbb{Z} & \text{für } n=2 \\ \langle z_n \rangle \cong \mathbb{Z} & \text{für } n \neq 2 \end{cases}$

Bew: Nachrechnen: $z_n s_i = s_i z_n$ für alle $i=1, \dots, n-1 \Rightarrow z_n \in Z(B_n)$
Anschaulich: z_n ist volle Drehung.

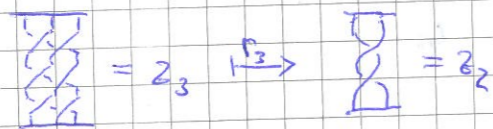
(1) $Z(P_n) = \langle z_n \rangle$ " \supset " ist klar. " \subset " bleibt zu zeigen.

$P_1 = \{1\}, Z(P_1) = \{1\} = \langle z_1 \rangle$

$P_2 = \langle s_1^2 \rangle \cong \mathbb{Z}, Z(P_2) = \langle s_1^2 \rangle = \langle z_2 \rangle$

Zeige: $Z(P_n) \subset \langle z_n \rangle$ für $n=3, 4, 5, \dots$ per Induktion

Hierzu $z \in Z(P_n)$. Unter $r_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$ gilt $r_n(z_n) = z_{n-1}$



Wir haben $r_n(z) \in Z(P_{n-1}) = \langle z_{n-1} \rangle$, also

$r_n(z) = z_{n-1}^k, k \in \mathbb{Z}$

Setze $z' := z \cdot z_n^{-k}$ und erhalten $(z') = 1$

Für $z' \in \text{Ker}(r_n) = F_{n-1}$ und $z' \in Z(P_n)$ gilt

$z' \in Z(F_{n-1}) = \{1\}$. Dh. $z' = 1, z = z_n^k$

(2) $Z(B_2) = B_2 \checkmark$

Für $n \geq 3$ betrachte $\pi: B_n \rightarrow S_n$

$\Rightarrow \pi(Z(B_n)) \subset Z(S_n) = \{1\}$

$\Rightarrow Z(B_n) \subset P_n \Rightarrow Z(B_n) \subset Z(P_n) = \langle z_n \rangle$

Abelschmachtung:

$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j| = 1 \end{matrix} \rangle$

$(B_n)_{ab} = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i & \text{für alle } i, j \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & |i-j|=1 \end{matrix} \rangle$

(Das ist die Exponenten-summe: $\alpha(s_1^{e_1} \dots s_{n-1}^{e_{n-1}}) = e_1 + \dots + e_{n-1}$)

$= \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i \\ s_i = s_j \end{matrix} \rangle \cong \langle S_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$

$S_n = \langle t_1, \dots, t_{n-1} \mid \begin{matrix} t_i t_j = t_j t_i & |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & |i-j| = 1 \\ t_i^2 = 1 \end{matrix} \rangle$

Exponentensumme: Zentrum, Unterschiede von B_n, P_n durch Exponentensumme (6.7.12)

$(S_n)_{ab} = \dots \cong \mathbb{Z}/2$

Das ist das Signum $\text{sign}: S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2, \text{sign}(t_{i_1} \dots t_{i_l}) = l \pmod 2$

Kapitel B Knotengruppen

Ziel: Zu Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$ berechnen und nutzen.

§B1 Erinnerung: Präsentation von Gruppen

Bsp: Zyklische Gruppe $G = \langle g, g^2, g^3, \dots, g^n = 1 \rangle$

mit $g^i \neq g^j$ für $0 \leq i < j < n$. Schreibweise

$G = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$

Bsp: Unendlich zyklische Gruppe $G = \langle g^h \mid h \in \mathbb{Z} \rangle$

mit $g^i \neq g^j$ für $i \neq j$ in \mathbb{Z} . Schreibweise

$G = \langle g \mid \dots \rangle$ Dann $\mathbb{Z} \cong G, k \mapsto g^k$

Bsp: $\langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z}^2$

$a^k b^l \longleftarrow (k, l)$

Woc: Die Zopfgruppen B_n sind untereinander nicht isomorph, denn in der Abelschmachtung $\alpha_n: B_n \rightarrow \mathbb{Z}$ gilt $\alpha_n(Z(B_n)) = n(n-1)\mathbb{Z}$

6.5.15

Das Zentrum der Zopfgruppe - ausführlicher

Übung(1) $Z(S_n) = \begin{cases} S_2 \cong \mathbb{Z}/2 & \text{für } n=2 \\ 1 & \text{für } n \neq 2 \end{cases}$

(2) $Z(F_n) = \begin{cases} F_1 \cong \mathbb{Z} & \text{für } n=1 \\ 1 & \text{für } n \neq 1 \end{cases}$

(3) Sei $h: G \rightarrow H$ surj. Gruppenhomomorphismus

Dann gilt $h(Z(G)) \subset Z(H)$.

Satz: Im Zentrum von B_n liegt $z_n = (s_1 s_2 \dots s_{n-1})^n$
 Es gilt $Z(P_n) = \langle z_n \rangle$ und $Z(B_n) := \begin{cases} B_2 \cong \mathbb{Z} & \text{für } n=2 \\ \langle z_n \rangle \cong \mathbb{Z} & \text{für } n \neq 2 \end{cases}$

Bew: Nachrechnen: $z_n s_i = s_i z_n$ für alle $i=1, \dots, n-1 \Rightarrow z_n \in Z(B_n)$

Anschaulich: z_n ist volle Drehung.

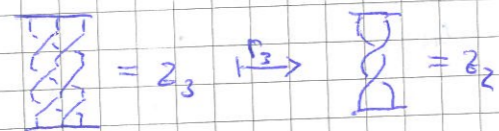
(1) $Z(P_n) = \langle z_n \rangle$ " \supset " ist klar. " \subset " bleibt zu zeigen.

$P_1 = \{1\}$, $Z(P_1) = \{1\} = \langle z_1 \rangle$

$P_2 = \langle s_1^2 \rangle \cong \mathbb{Z}$, $Z(P_2) = \langle s_1^2 \rangle = \langle z_2 \rangle$

Zeige: $Z(P_n) \subset \langle z_n \rangle$ für $n=3, 4, 5, \dots$ per Induktion

Hierzu $z \in Z(P_n)$. Unter $r_n: P_n \rightarrow P_{n-1}$ gilt $r_n(z_n) = z_{n-1}$.



Wir haben $r_n(z) \in Z(P_{n-1}) = \langle z_{n-1} \rangle$, also

$r_n(z) = z_{n-1}^k$, $k \in \mathbb{Z}$

Setze $z' := z \cdot z_n^{-k}$ und erhalten $(r_n(z')) = 1$.

Für $z' \in \text{Ker}(r_n) = F_{n-1}$ und $z' \in Z(P_n)$ gilt

$z' \in Z(F_{n-1}) = \{1\}$. Dh. $z' = 1$, $z = z_n^k$

(2) $Z(B_2) = B_2$ ✓

Für $n \geq 3$ betrachte $\pi: B_n \rightarrow S_n$

$\Rightarrow \pi(Z(B_n)) \subset Z(S_n) = \{1\}$

$\Rightarrow Z(B_n) \subset P_n \Rightarrow Z(B_n) \subset Z(P_n) = \langle z_n \rangle$

Abelschmachtung:

$B_n = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j|=1 \end{matrix} \rangle$

$(B_n)_{ab} = \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i & \text{für alle } i, j \\ s_i s_j s_i = s_j s_i s_j & \text{für } |i-j|=1 \end{matrix} \rangle$

(Das ist die Exponenten-summe: $\alpha(s_{i_1}^{e_1} \dots s_{i_k}^{e_k}) = e_1 + \dots + e_k$)

$= \langle s_1, \dots, s_{n-1} \mid \begin{matrix} s_i s_j = s_j s_i \\ s_i = s_j \end{matrix} \rangle \cong \langle s_1 \rangle \cong \mathbb{Z}$

$S_n = \langle t_1, \dots, t_{n-1} \mid \begin{matrix} t_i t_j = t_j t_i & \text{für } |i-j| \geq 2 \\ t_i t_j t_i = t_j t_i t_j & \text{für } |i-j|=1 \\ t_i^2 = 1 \end{matrix} \rangle$

Exponenten-summe: Zeichen, Unterschied von B_n, P_n durch Exponenten-summe $(e_i = \pm 1)$.

$(S_n)_{ab} = \dots \cong \mathbb{Z}/2$

Das ist das Signum $\text{sign}: S_n \rightarrow \mathbb{Z}/2$, $\text{sign}(t_{i_1} \dots t_{i_k}) = k \pmod 2$

Kapitel B Knotengruppen

Ziel: Zu Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$ berechnen und nutzen.

§B1 Erinnerung: Präsentation von Gruppen

Bsp: Zyklische Gruppe $G = \langle g, g^2, g^3, \dots, g^n = 1 \rangle$

mit $g^i \neq g^j$ für $1 \leq i < j \leq n$. Schreibweise

$G = \langle g \mid g^n = 1 \rangle$

Bsp: Unendlich zyklische Gruppe $G = \langle g^h \mid h \in \mathbb{Z} \rangle$

mit $g^i \neq g^j$ für $i \neq j$ in \mathbb{Z} . Schreibweise

$G = \langle g \mid - \rangle$ Dann $\mathbb{Z} \cong G$, $k \mapsto g^k$

Bsp: $\langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong \mathbb{Z}^2$

$(a^k b^l) \longleftarrow (k, l)$

Freie Gruppe: Sei (G, \cdot) eine Gruppe, $S \subseteq G$

Die von S erzeugte UGr. ist

$$\langle S \rangle = \{ s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n} \mid n \in \mathbb{N}, s_i \in S, e_i \in \mathbb{Z} \}$$

Wir nennen $s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n}$ genau $(s_1, e_1; \dots; s_n, e_n) \in (S \times \mathbb{Z})^n$
alle möglichen Wörter, s_i können sich wiederholen, e_i für ± 1
↑ Exponent

ein Wort über S .

Es heißt reduziert, wenn $s_i \neq s_{i+1}$ und $e_i \neq 0$ für alle i .

Def: Eine Gruppe G heißt frei über $S \subseteq G$, wenn sich jedes

$g \in G$ eindeutig schreiben lässt als reduziertes Wort über S .

(S sozusagen Erzeuger/Basis von G)

Bsp: $G \cong \mathbb{Z}/5$ nicht frei über $S = \{g\}$, weil

$$g^0 = g^5 = g^{10} = g^{15} = \dots \quad (\text{mehrere red. Darst. desselben Wortes})$$

\uparrow Wort $()$ \uparrow $(g, 5)$

Bsp: $G \cong \mathbb{Z}$ ist frei über $S = \{g\}$

Bsp: $G \cong \mathbb{Z}^2$ ist nicht frei über $S = \{a, b\}$, denn $ab = ba$.

Wähle $(a, 1; b, 1) \neq (b, 1; a, 1)$

Satz: Zu jeder Menge S existiert eine freie Gruppe $F(S) = \langle S, - \rangle$ über S .

Bew: Übung (Man nimmt die reduzierten Wörter, zu zueinander bilden Gruppe)

Satz (universelle Abbildungseigenschaft)

Eine Gruppe F ist genau dann frei über $S \subseteq F$, wenn gilt:

Zu jeder Abb. $f: S \rightarrow G$ in eine Gruppe G ex. genau ein

Gruppenhom. $h: F \rightarrow G$ mit $h|_S = f$.

Bem: $\text{Hom}(F, G) \xrightarrow{\cong} \text{Abb}(S, G), h \mapsto h|_S$

Bew: " \Rightarrow " $F = \{ s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n} \mid \text{red. Wörter} \} \xrightarrow{h} G,$

$h(s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n}) = f(s_1)^{e_1} \dots f(s_n)^{e_n}$ ist die einzige Mögl.

Dies ist wohldefiniert und multiplikativ.

" \Leftarrow " Abstract general nonsense

Angenommen F hat die UAE über S . Dann

$$\exists! h: F \rightarrow F(S) \quad h|_S = \text{id}_S$$

$$\exists! h: F(S) \rightarrow F(S) \quad h|_S = \text{id}_S$$

Für diese gilt $h \circ h = \text{id}_F$ und $h \circ h = \text{id}_{F(S)}$

$$F(S) \xrightarrow[\text{id}]{h \circ h} F(S) \quad F(S) \xrightarrow[\text{id}]{h \circ h} F(S)$$

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$$

$$S \xrightarrow{\text{id}} S \quad S \xrightarrow{\text{id}} S //$$

Def: Sei S eine Menge. $F = F(S)$ freie Gruppe über S und $R \subseteq F$

Wir nennen (S, R) eine Präsentation mit Erzeuger S und Relationen

R . Die hierdurch präsentierte Gruppe ist

$$\langle S | R \rangle := F / \langle R^F \rangle$$

Hierbei ist $\langle R^F \rangle$ die von R normal erzeugte Untergruppe von F ,
(Normalteiler)
d.h. $\langle R^F \rangle = \langle r^f \mid r \in R, f \in F \rangle$ wird erzeugt von allen

\uparrow Konjugierten von $r \in R$ in F . Dies ist die kleinste normale UGr, die R enthält.

Bsp: 1) Für $R = \emptyset$ gilt $\langle S | \emptyset \rangle = \langle S | - \rangle = F(S)$

2) $\langle a | - \rangle \cong \mathbb{Z}, a^k \mapsto k$
äquivalent binomischer Isomorphismus

3) $\langle a | a^n \rangle \cong \mathbb{Z}/n, a^k \mapsto k$

4) $\langle a, b | aba^{-1}b^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z}^2, a^k b^l \mapsto (k, l)$

5) Zopfgruppe, symm. Gruppe

Satz: (UAE) Sei (S, R) wie oben, $f: S \rightarrow G$. Dann sind äquivalent:

(1) Der Gruppenhom. $h: F(S) \rightarrow G$ mit $h|_S = f$ erfüllt

$h(R) = 1$ (und faktorisiert somit).

(2) Es ex. ein Gruppenhom. $\bar{h}: \langle S | R \rangle \rightarrow G$ mit $\bar{h} \circ \text{quot} = f$.

(hierbei ist $\text{quot}: F(S) \rightarrow F(S) / \langle R^F \rangle =: \langle S | R \rangle$

der Quotientenhomomorphismus).

Prop: Jede Gruppe G erlaubt eine Präsentation, d.h. ein Tripel (S, R, h) mit $h: \langle S | R \rangle \xrightarrow{\cong} G$.

Bsp: $\mathbb{Z}/5 = \{ \bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4} \}, h: \langle a | a^5 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^5, a \mapsto 1$

(wohldef., surj., inj.) $h: \langle a | a^5 \rangle \rightarrow \mathbb{Z}^5, a \mapsto 2$

Zu einer gegebenen Gruppe G gibt es stets unendlich viele Präsentationen!
 Die folgenden Tietze-Operationen ändern die Präsentation, nicht aber die präzentierte Gruppe:

- (T1) Hinzufügen/Entfernen einer redundanten Relation:
 $(S, R) \rightsquigarrow (S, R')$ mit $R' = R \cup \{r\}$, $r \in \langle R^F \rangle | R$
- (T2) Hinzufügen/Entfernen eines redundanten Erzeugers
 $(S, R) \rightsquigarrow (S', R')$ mit $S = S' \cup \{s\}$ und
 $R' = R \cup \{s^{-1}ws\}$, $w \in \langle S \rangle$ Warum $s^{-1}ws$?

Satz von Tietze (1908): Zwei (endliche) Präsentationen (S, R) und (S', R') präsentieren genau dann isomorphe Gruppen, wenn sie sich durch (T1, T2) ineinander überführen lassen.

§B2 Wirtinger-Präsentation von Knotengruppen

11.5.15

§B2 Ziel: Zu einem Knoten $K \subset \mathbb{R}^3$ wollen wir die Knotengruppe

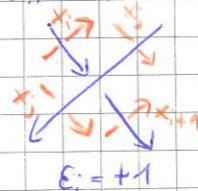
$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$ "berechnen", d.h. präzentieren und auswerten.

Wirtinger-Präsentation: Stelle K durch ein ebenes Diagramm D dar, K und D orientiert.

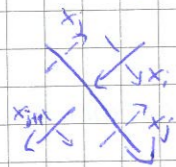
Erzeuge: Bögen x_1, x_2, \dots, x_n von D .

Relationen: Kreuzungen

$x_i x_j = x_j x_{i+1}$



$x_i x_j = x_j x_{i+1}$
 $x_j^{-1} x_i x_j = x_{i+1}$



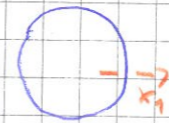
$x_j x_i = x_{i+1} x_j$
 $x_j^{-1} x_i x_j^{-1} = x_{i+1}$

Zusammengefasst: $x_{j(i)}^{-\epsilon(i)} x_i x_{j(i)}^{\epsilon(i)} = x_{i+1}$

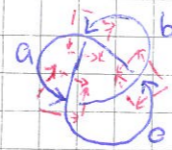
Die Daten $\epsilon: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}$ und $j: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ liest man leicht aus dem Diagramm ab

Def: $\pi_D := \langle x_1, \dots, x_n \mid x_{j(i)}^{-\epsilon(i)} x_i x_{j(i)}^{\epsilon(i)} = x_{i+1}; i=1, \dots, n \rangle$

Bsp:



$\pi_D = \langle x_1 \mid -1 \rangle \cong \mathbb{Z}$
 (with 'Unknot' label pointing to the loop)



$\pi_D = \langle a, b, c \mid \begin{matrix} ac=cb \\ cb=ba \\ ba=ac \end{matrix} \rangle = \langle a, b, c \mid \begin{matrix} a^c=b \\ b^a=c \\ c^b=a \\ a^c=c^b a c \end{matrix} \rangle$

Bem: π_D ist unendlich, denn wir haben die Abelschmachung

$(\pi_D, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +), x_i \mapsto 1$

Δ Für Verschlingungen bzw. Schlingen mit n Komponenten entsprechend $\pi_D \rightarrow \mathbb{Z}^n$?

Bem: Im Bsp ist π_D nicht abelsch, also $\pi_D \not\cong \pi_D$ (with 'Unknot' label pointing to the second pi_D)

Betrachte $h: \pi_D \rightarrow S_3$ mit $a \mapsto (12), b \mapsto (23), c \mapsto (13)$

$a^c = (23) = b, b^a = (13) = c, c^b = (12) = a$

Da h surj. & S_3 nicht abelsch, ist auch π_D nicht abelsch.

Noch zu zeigen: π_D ist eine Invariante des Knotentyps!

- 1) R-Züge \Rightarrow Tietze-Transformationen (Satz von Reidemeister)
- 2) Isomorphismus $\pi_D \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$ (RS: isotopischer Invarianten)

Erinnerung: Permutationen, Zykelschreibweise und Konjugation

In S_n nutzen wir folgende Schreibweise:

Seien $i_1, \dots, i_l \in \{1, \dots, n\}$ verschieden. Definiere

$c := (i_1 \dots i_l)$ durch $c: i_1 \mapsto i_2 \mapsto i_3 \mapsto \dots \mapsto i_l \mapsto i_1$

Prop: Jedes $\sigma \in S_n$ ist Produkt disjunkter Zyklen, und zwar eindeutig bis auf Umrangung der Faktoren

Bsp: $\sigma = (1352)(476) = (476)(1352)$

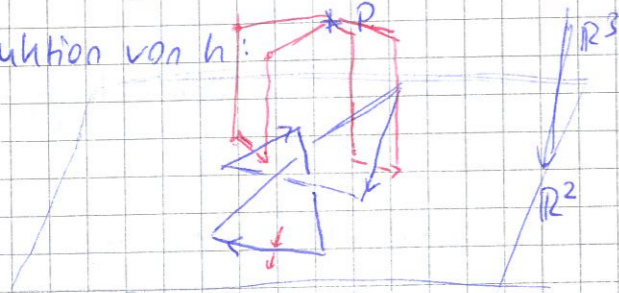
Konjugation: $(i_1 \dots i_l)^\sigma = \sigma^{-1} \circ (i_1 \dots i_l) \circ \sigma = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_l))$

$\sigma(i_k) \mapsto i_k \mapsto i_{k+1} \mapsto \sigma(i_{k+1})$

Satz: (Wirtinger ≈ 1900) Es gibt einen Gruppenisomorphismus

$$h: \pi_0 \xrightarrow{\cong} \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$$

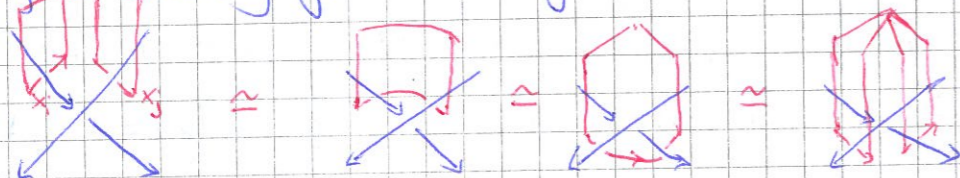
o) Konstruktion von h:



Wie in der Skizze ordnen wir jedem Bogen b_i von \mathbb{D} einen (polygonalen) Weg $\gamma_i: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K$ zu

Dieser definiert ein Gruppenelement $w_i = [\gamma_i] \in \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K)$

An jeder Kreuzung gilt die Wirtinger-Relation:



Wir haben demnach einen Gruppenhom. $h: \pi_0 \rightarrow \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$ mit

$$x_i \mapsto w_i = [\gamma_i]$$

1) h ist surjektiv, d.h. $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$ wird erzeugt von w_1, \dots, w_n .

Wir nutzen die polygonale F_u -Gruppe:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K, *) = \frac{\{\text{Schleifen}\}}{\text{Homotopie}} \cong \frac{\{\text{polygonale Schleifen}\}}{\text{polygonale Homotopie}}$$

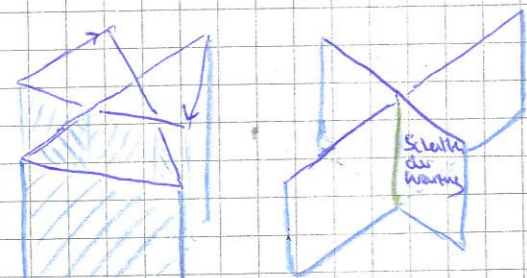
(offen) \uparrow polygonale Approximation!

$$\left(\begin{array}{l} [0,1] \rightarrow X \subset \mathbb{R}^2 \\ [0,1]^2 \rightarrow X \end{array} \right)$$

OE betrachten wir also polygonale Schleifen γ in $\mathbb{R}^3 \setminus K$. Zz:

$$\gamma \cong \gamma_1^{e_1} \gamma_2^{e_2} \dots \gamma_n^{e_n}$$

Trick: Betrachten den "Schatten" des Knotens $K \subset \mathbb{R}^3$.



Genauer: Zu $K \subset \mathbb{R}^3$ ist der Schatten

$$\hat{K} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \exists z' \geq z \text{ s.t. } (x,y,z') \in K\}$$

Dies ist die Vereinigung über alle

Schatten \hat{A} der Knoten A von K .

Zentral projiziert wäre es

senkrecht. So: senkrecht projiziert wäre es

Prop: $\mathbb{R}^3 \setminus \hat{K} \cong *$ (Ü: Explizite Formel? Vgl. Sternförmig bei Zentralproj.)

$$\text{Insb. } \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \hat{K}) = \{1\}$$

Ableser an $w = [\gamma]$ eines Wertes in $w_i = [\gamma_i]$.

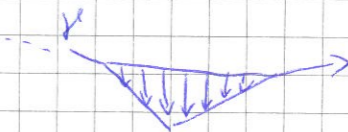
OE: γ trifft die Wände \hat{A} transvers im Inneren. Jeder Durchgang liefert einen Erzeuger $w_i^{e_i}$

$$\text{Damit: } \gamma \cong \gamma_1^{e_1} \dots \gamma_n^{e_n}$$

Skizze! (Explizit?)

2) h ist injektiv, d.h. die Wirtinger-Relationen erzeugen alle Relationen.

Polygonale Homotopie:

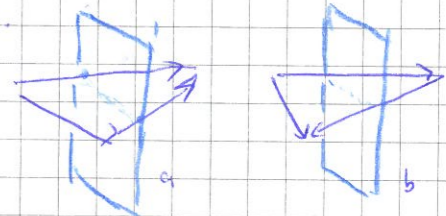


Fälle: 1) keine Wand

=> keine Änderung des Wertes.

Schneidet eine Wand wie in Skizze

a => keine Änderung b => Einfügen/Löschen von $w_i^{\pm 1}$



Schneidet den Schatten einer Kreuzung:

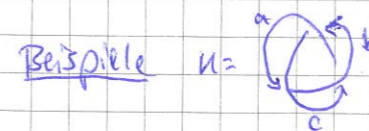


=> Wirtinger-Relation!

Damit sind alle Fälle abgedeckt. //

§B3 Untersuchung zahlener Knoten

13.5.15



$$\text{Beispiele } \pi_K \cong \langle a, b, c \mid \begin{array}{l} a^c = b \\ b^a = c \\ c^b = a \end{array} \rangle$$

$$\cong \langle a, b, c \mid \begin{array}{l} b = a^c \\ c = b^a \\ a = c^b \end{array} \mid \begin{array}{l} b = (a^{-1} b^{-1} a) (a^{-1} b a) \\ a = b^{-1} (a^{-1} b a) b \end{array} \rangle$$

$$\cong \langle a, b, c \mid \begin{array}{l} a b a = b a b \\ c = a^{-1} b a \end{array} \rangle$$

$$\cong \langle a, b \mid a b a = b a b \rangle \cong B_3 (!)$$

Wie löst man das Wortproblem in dieser speziellen Gruppe?

Bsp: $w = a^{21} b^{-15} a^{-33} b^4 a^{-47} b^{20} = 1$ in π_1 ?

Wir können $\alpha: \pi_1 \rightarrow \mathbb{Z}$, $a, b \mapsto 1$, $\alpha(w) = 0$

Wir können $\varphi: \pi_1 \rightarrow SL_2 \mathbb{Z} = \langle x, y \mid xyx = yxy, (xyx)^4 = 1 \rangle$

$a \mapsto X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$b \mapsto Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

$\ker(\varphi) = \langle (aba)^4 \rangle \hat{=} \mathbb{Z}[\pi_1]$

In B_3 : $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^4 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_2)^2 = z_2^2$



Also ist $\alpha \circ \varphi: \pi_1 \rightarrow \mathbb{Z} \times SL_2(\mathbb{Z})$ injektiv!

Bsp: Ebenso für Verschlingungen

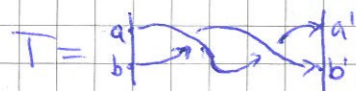


$\pi_L = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus L, *)$

$= \langle a, b \mid a^b = a, b^a = b \rangle$

$= \langle a, b \mid ab = ba \rangle \cong (\mathbb{Z}^2, +)$ $a^k b^l \leftrightarrow (k, l)$

Schlingel:



$\pi_T = \langle a, b, a', b' \mid b^a = b', a^{b'} = a' \rangle$

$= \langle a, b, a', b' \mid b' = a^{-1} b a, a' = (b')^{-1} a b', a = a^{-1} b' a a^{-1} b a \rangle$

$= \langle a, b, a', b' \mid b' = a^{-1} b a, a = a^{-1} b^{-1} a b a \rangle$

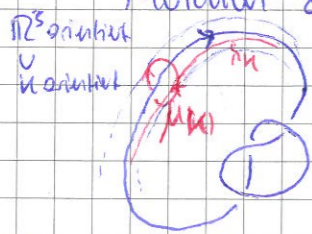
$\cong \langle a, b \mid - \rangle$ freie Gruppe

Bem: Für n-Zöpfe gilt $\pi_T \cong F_n$ (Übung!)

Dazu später mehr.

Heute: nur Knoten

Meridian & Longitude



$\pi_K = (\mathbb{R}^3 \setminus K, *)$

$m_K = [m_K]$

$l_K = [l_K]$

Sei $K \subset \mathbb{R}^3$ ein Knoten, K, \mathbb{R}^3 wie immer orientiert (polygonal/glatt)

\exists Tubenumgebung $f: S^1 \times D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ (polygonal/glatt)

mit $f(S^1 \times S^0) = K$ mit Orientierungen.

$m_K = f|_{S^1 \times S^1}$, genau: $m_K, l_K: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus K$

$m_K(t) = f(1, e^{2\pi i t})$

$l_K = f|_{S^1 \times \{0\}}$

$l_K(t) = f(e^{2\pi i t}, 0)$

mit den Bedingungen $lk(K, m_K) = +1$, $lk(K, l_K) = 0$

Solche Tubenumgebungen sind eind. bis auf Isotopie.

Insb. sind $m_K = [m_K]$ und $l_K = [l_K]$ in π_1 wohldefiniert.

Def: Betrachte $K \subset \mathbb{R}^3 \subset S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$

$E_K := S^3 \setminus f(S^1 \times D^2) \subset S^3$

ist eine kompakte 3-Mfkt. mit Rand $\partial E \cong S^1 \times S^1$

Sie heißt Knotenaußerraum zu K .

$S^3 \setminus K \simeq E_K$ Homotopieäquivalenz.



$\pi_1(S^3 \setminus K, *) \cong \pi_1(E_K, *) \xleftarrow{m_K, l_K} \pi_1(S^1 \times S^1, *) \cong \mathbb{Z}^2$ (Fußspatze bei (1,1))

Das Tripel (π_1, m_K, l_K) heißt in dieser Vorlesung "Hugo".

Ablesen in der Wirtinger-Präsentation:



$l_K = (\dots x_j^{-1} \dots x_n \dots) \cdot x_1^{-\text{Exp.}} \dots$ (globale Korrekturen)

$= x_1 x_j^{-1} \dots x_2^{-1} x_n \dots$ (lokale Korrekturen)

Bsp:



$\pi_K = \langle a, b, c \mid \begin{matrix} a^c = b \\ b^a = c \\ c^b = a \end{matrix} \rangle$

$m_K = a$

$l_K = c a b a^{-2}$ (globale Korrekturen)

$b^{-1} c = a b^{-1}$

$= c a c^3 b = c b^{-2} a c^{-1} b$

$b a^{-1} = c^{-1} b$

$= a^{-1} c b^{-1} a c^{-1} b$ (lokale Korrekturen)

- $K \subset \mathbb{R}^3$ (π_u, m_u, l_u)
- K^* ^{Reversion} Spiegelung (Orientierung von \mathbb{R}^3) (π_u, m_u^{-1}, l_u)
- K' Reversion Orient. von K $(\pi_u, m_u^{-1}, l_u^{-1})$
- K^* Inversion Orient. von K und \mathbb{R}^3 (π_u, m_u, l_u^{-1})



Betrachte $\rho: \pi_u \rightarrow A_5$ (Wirklich eine abelsche verdrängte Gruppe)

$$m_u a \mapsto (12345)$$

A_5 hat 60 Elemente
 x hat 12 Konjugierte in A_5 .

Versuche $b \mapsto y = (12453), (23514), (34125), (45231), (51342)$
(durch Konjugation mit a)

$$c = b^a = (23514)$$

$$a^c \stackrel{?}{=} b, \quad a^c = (43521) \neq b \Rightarrow b \mapsto y \text{ geht nicht}$$

\Rightarrow Es bleiben 5 Möglichkeiten für b .

18.5.15

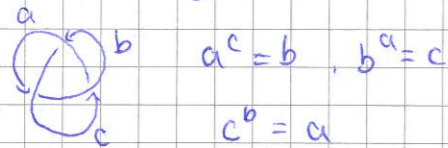
Auf Englisch heißt (π_u, m_u, l_u) "group system"

Hugo heißt jetzt Pamela.

$$\text{Hom}(\pi_u, G) = \text{Hom}(\pi_u, m_u; G, x)$$

Bsp: $K =$ Kleeblatt

$$G = A_5, \quad x = (12345)$$



$$a^c = b, \quad b^a = c$$

$$c^b = a$$

In A_5 hat x genau 12 Konjugierte. $a \mapsto x$

1. $b \mapsto x \Rightarrow$ triviale Darstellung $\pi_u \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow G$ (unfaithful)
(abelsche Darstellung) $m_u \mapsto 1 \mapsto x$

2. $b \mapsto (12453)$

$$c = b^a = (23514)$$

$$b \stackrel{?}{=} a^c = (43521) \quad \checkmark$$

Ebenso $b \mapsto (23514)$
 (34125) mit x konjugiert.
 (45231)
 (51342)

3. $b \mapsto (15243)$

$$c = b^a \mapsto (21354)$$

$$b \stackrel{?}{=} a^c = (31524) \quad \checkmark$$

$$[c^b = a \mapsto (45123) \text{ redundant}]$$

Ebenso $b \mapsto (21354)$

$$(32415)$$

$$(43521)$$

$$(54132)$$

4. $b \mapsto x^{-1} = (54321)$

$$c = b^a \mapsto x^{-1}$$

$$b \stackrel{?}{=} a^c \mapsto x$$

Also $|\text{Hom}(\pi_u, m_u; G, x)| = 6$.

Was ist $\rho(l_u)$?

$$l_u = \text{bab} \cdot a^{-3} \xrightarrow{(1)} 1$$

$$\xrightarrow{(3)} (21354)(12345)(15243)(13524) = (15432) = x^{-1}$$

Def: Zu einer endlichen Gruppe G und $x \in G$ definieren wir die

$$\text{Färbungszahl } F_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{N}, \quad F_G^x(K) = |\text{Hom}(\pi_u, m_u; G, x)|$$

$$\text{und das Färbungspolynom } P_G^x: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}[G], \quad P_G^x(K) = \sum_{\rho: (\pi_u, m_u) \rightarrow (G, x)} \rho(l_u)$$

Bsp: $K =$ Kleeblatt wie oben, $(G, x) = (A_5, (12345))$

$$F_G^x(K) = 6 \text{ und } P_G^x(K) = 1 + 5x^{-1}$$

Für den inversen Knoten K^* gilt $(\pi_u, m_u, l_u) = (\pi_u, m_u, l_u^{-1})$

$$\text{also } P_G^x(K^*) = 1 + 5x \quad (\text{NB: } x \neq x^{-1} \text{ in } A_5)$$

Für den oberen Knoten $K^* : (\pi_n, m_n^{-1}, l_n)$

$$(\pi_n, m_n, l_n) \xrightarrow{S} (A_5, x) \xrightarrow[\text{Konj.}]{(12)(24)} (A_5, x^{-1})$$

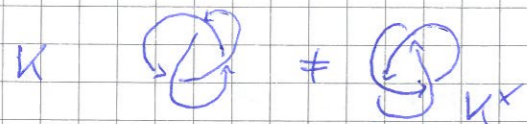
Damit $F_G^x(K^*) = G$ und $P_G^x(K^*) = 1 + 5x$.

Für den reversen Knoten $K' : (\pi_n, m_n^{-1}, l_n^{-1})$

Damit $P_G^x(K') = 1 + 5x^{-1}$.

Kor: $K \neq K^*$, d.h. die Kleeblattseilinge ist chiral.

(ü: $K = K'$, d.h. K ist reversibel)



Bem: Knotengruppendarstellungen entsprechen Färbungen

Speziell p -Färbungen entsprechen Darstellungen in der

Diedergruppe (D_p, S)

Sei $n \geq 3$, $P_n = [e^{2\pi i k/n} \mid k=1, \dots, n]$

$D_n = \text{Isom}(P_n)$

$$= \left\{ r_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & -\sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & \cos(2\pi k/n) \end{pmatrix} \right.$$

$$s_k = \begin{pmatrix} \cos(2\pi k/n) & \sin(2\pi k/n) \\ \sin(2\pi k/n) & -\cos(2\pi k/n) \end{pmatrix} \mid k=0, \dots, n-1$$

Auf Eckpunkten setzen die Permutationen:

$$r_k, s_k: \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n, r_k(x) = k+x, s_k(x) = k-x.$$

Satz: Wir erhalten die Präsentation:

$$D_n = \langle s_0, s_1 \mid s_0^2, s_1^2, (s_1 s_0)^n \rangle$$

$$= \langle s, r \mid s^2, r^n, srs = r^{-1} \rangle$$

Beweis: Übung!

Für Färbungen benötigen wir Konjugationen:

$$S_a^{S_b} = S_b^{-1} S_a S_b: \mathbb{Z}/n \rightarrow \mathbb{Z}/n$$

$$x \mapsto b-x \mapsto a-(b-x) \mapsto b-(a-(b-x)) = (2b-a)-x = S_{2b-a}(x)$$

Das entspricht der n -Färbungsregel:

$$s_c \stackrel{!}{=} s_a s_b = s_{2b-a}$$

Kurz: $\begin{matrix} a & b \\ \swarrow & \searrow \\ c & d \end{matrix}$ mit $c=2b-a$.

Bsp: Der Knoten 8_{17} ist der kleinste nicht-reversible Knoten.



(M. Wirteba Spezialis der Gruppe, einfach und schnell, 1990, 78 Seiten)

Hierzu nutzen wir die Mathieu-Gruppe $G = M_{11}$ der Ordnung 7920

$$G = \langle x, y \rangle < A_{11}, x = (abcdefghijk)$$

$$y = (abcdejhdghf)$$

Für $K = 8_{17}$ und (G, x) finden wir $P_G^x(K) = 1 + 11x^5 + 11x^6$

$$P_G^x(K') = 1 \Rightarrow K \neq K'$$

(Bem: Es gilt $K = K^*$, ^{inversibel} amphichiral)

Wichtige Sätze zu Knotengruppen:

Beob: K trivial $\Rightarrow \pi_1 \cong \mathbb{Z} \Rightarrow \pi_1$ abelsch $\Rightarrow l_n = 1$.

Satz: (Papakyriakopoulos 1957, Dehn'scher Lemma 1910)

Genau dann ist K trivial, wenn $l_n = 1$ in π_1 gilt.

Beob: $K \sim K' \Rightarrow (\pi_1, m_n, l_n) \cong (\pi_1, m_n, l_n)$

Satz: (Waldhausen 1968)

Aus $(\pi_1, m_n, l_n) \cong (\pi_1, m_n, l_n)$ folgt $K \sim K'$.

Beob: $\exists \varphi: \pi_1 \rightarrow G$ Homom., G endlich, $\varphi(x) \neq 1$

$$\Downarrow \quad \Uparrow *$$

$$x \neq 1 \text{ in } \pi_1$$

Satz: (Thurston 1983) Jede Knotengruppe π_1 ist residuell endlich (*).

Kor: Das Problem, zu einem (gahnen) Knoten zu entscheiden, ob $U \approx 0$ oder $U \neq 0$ ist algorithmisch lösbar.

Algorithmus: Input: K (polygonal, Diagramm)

Output: "trivial" falls $U \approx 0$

"nicht-trivial" falls $U \neq 0$

1. Präsentiere $\pi_1, m_i, l_i; \pi_1 = \langle S | R \rangle$

2a Generiere aus R alle Konsequenzen $\langle R^{F(S)} \rangle =: N$

Falls $l_i \in N$, dann $l_i = 1$ in π_1 und $U \approx 0$ (Semiregulär)

2b Generiere alle Homomorphismen $\varphi: \pi_1 \rightarrow G$ in endliche Gruppen.

Falls $\varphi(l_i) \neq 1$, dann $l_i \neq 1$, also $U \neq 0$

(Es genügt $G = S_3, S_4, S_5, \dots$, Satz von Cayley, jede endl. Gruppe in einer S_n)

Dank Thurston ist dies ein Algorithmus.

20.5.15

Nachtrag / Nachfrage zu Tietze

Tietze-Transformationen:

(T1) $(S, R) \leftrightarrow (S, R \cup R')$ mit $R' \subset \langle R^{F(S)} \rangle$

(T2) $(S, R) \leftrightarrow (S \cup S', R \cup R')$ $R' = \{s'w_s^{-1} \mid s' \in S'\}$ u. $w_s \in F(S)$

Satz (Tietze 1908) Zwei Präsentationen (S, R) und (S', R') stellen genau dann isomorphe Gruppen dar, wenn sie sich durch (T1, 2) ineinander überführen lassen. Genauer gilt: Jeder Isomorphismus $\langle S | R \rangle \cong \langle S' | R' \rangle$ lässt sich durch (T1, T2) erzeugen.

Bew: " \Leftarrow " (T1): $\langle S | R \rangle = \langle S | R \cup R' \rangle$ ($R \cup R'$ ist derselbe Quotient)

(T2): $\langle S | R \rangle \cong \langle S \cup S' | R \cup R' \rangle$

$h: S \hookrightarrow S \cup S'$ induziert

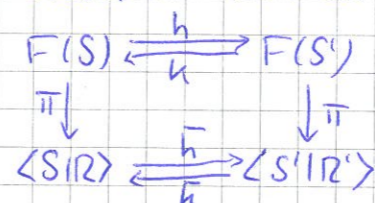
$k: F(S \cup S') \rightarrow F(S)$ mit $s' \mapsto w_s$ induziert \bar{k} .

Damit gilt $k \circ \bar{h} = \text{id}_{\langle S | R \rangle}$ und $\bar{h} \circ k = \text{id}_{\langle S' | R' \rangle}$

" \Rightarrow " Seien $\bar{h}: \langle S | R \rangle \rightarrow \langle S' | R' \rangle$ und

$\bar{k}: \langle S' | R' \rangle \rightarrow \langle S | R \rangle$ zueinander inverse Isomorphismen.

Diese heben wir hoch zu $h: F(S) \rightarrow F(S')$ und $k: F(S') \rightarrow F(S)$



Wir können $S \cap S' = \emptyset$ annehmen.

Wir betrachten $S^* = S \cup S'$ und $R^* = R \cup R' \cup R_h \cup R_k$

$R_h = \{s h(s)^{-1} \mid s \in S\}$

$R_k = \{s' k(s')^{-1} \mid s' \in S'\}$

$\varphi: \langle S | R \rangle \xrightarrow{\cong} \langle S \cup S' | R \cup R_h \rangle \cong \langle S^* | R \cup R_h \cup R' \rangle$

$\cong \langle S^* | R \cup R_h \cup R' \cup R_k \rangle = \langle S^* | R^* \rangle$

$\psi: \langle S' | R' \rangle \xrightarrow{\cong} \langle S \cup S' | R' \cup R_h \rangle \cong \langle S^* | R' \cup R_h \cup R \rangle$

$\cong \langle S^* | R' \cup R_h \cup R \cup R_k \rangle = \langle S^* | R^* \rangle$

Schließlich gilt $\psi^{-1} \circ \varphi = \bar{h}: \langle S | R \rangle \xrightarrow{\cong} \langle S' | R' \rangle$

$\varphi^{-1} \circ \psi = \bar{k}: \langle S' | R' \rangle \xrightarrow{\cong} \langle S | R \rangle$

§B4 Anwendung auf wilde Knoten

Erinnerung: Für jeden einfachen Polygenzug $\gamma: [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \gamma \neq \text{pt}$,

$P = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ gilt:

1) P ist Δ -äquivalent zu $(-e_1, e_1)$

2) $\mathbb{R}^3 \setminus \gamma([0,1]) \cong \mathbb{R}^3 \setminus [-e_1, e_1] \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

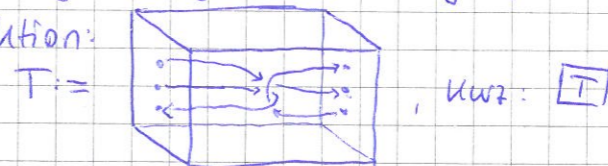
3) $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma([0,1])) = \mathbb{Z}$



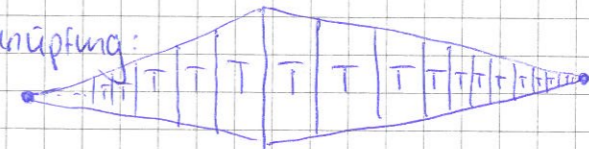
(Übung: warum?)

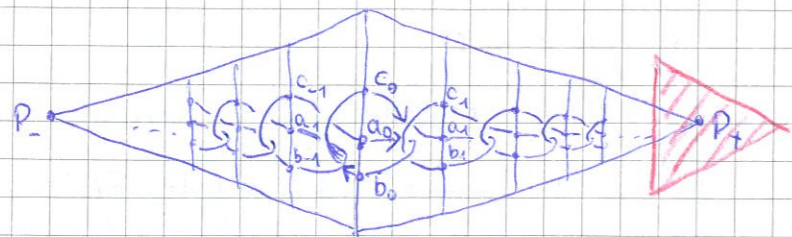
Für (beliebige topologische) Einbettungen $\gamma: [0,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ gilt dies nicht!

Konstruktion:



Unendliche Verknüpfung:





Wir erhalten $y:]-1,1[\hookrightarrow \mathbb{R}^3$ $]-1,1[$

Dank Konvergenz setzt sich dies stetig fort zu $y: [-1,1] \hookrightarrow \mathbb{R}^3$, $y(\pm 1) = p_{\pm}$

Berechnung von $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus y([-1,1]))$

Erzeuger: $S = \{a_n, b_n, c_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

Relationen R:

(1) $a_{n+1} = c_{n+1} c_n c_{n+1}^{-1}$

(2) $b_n = c_{n+1} a_n c_{n+1}^{-1}$

(3) $c_{n+1} = b_n b_{n+1} b_n^{-1}$

(4) $b_n^{-1} a_n c_n = 1$ (red triangle)

Beh: $\langle S | R \rangle \neq \langle 1 \rangle$

Eliminiere a_n : (2') $b_n = c_{n+1} \frac{c_n c_{n-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1}}{a_n} c_{n+1}^{-1}$

Eliminiere b_n : (3') $c_{n+1} = \frac{c_{n+1} c_n c_{n-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1}}{c_{n+2} c_{n+1} c_n c_{n+1}^{-1} c_{n+2}^{-1}} \cdot \frac{c_{n+1} c_n c_{n-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1}}{c_{n+1}^{-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1}}$

(4) $c_{n+1} c_n c_{n-1}^{-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1} \cdot c_n c_{n-1} \frac{c_n^{-1}}{c_{n+1}} \cdot c_n = 1$ ($b_n^{-1} a_n c_n = 1$)

(4'') $c_n c_{n-1} c_{n+1} c_n = c_{n+1} c_n c_{n-1}$

(3') $\stackrel{(4'')}{\Rightarrow} c_n c_{n-1} \frac{c_{n+1} c_n c_{n-1}^{-1} c_{n+1}^{-1}}{c_{n+1} c_n c_{n-1} c_{n+1}^{-1} c_{n+1}^{-1}} \cdot \frac{c_{n+1} c_n c_{n-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1}}{c_{n+1}^{-1} c_n^{-1} c_{n+1}^{-1}} = c_{n+1}$

$\Leftrightarrow c_n c_{n-1} c_{n+1} c_n c_{n-1}^{-1} c_n^{-1} = c_{n+1}$

$\Leftrightarrow c_n c_{n-1} c_{n+1} c_n = c_{n+1} c_n c_{n-1}$

$\Leftrightarrow (4'')$

$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus y([-1,1])) \cong \langle c_n : n \in \mathbb{Z} \mid c_n c_{n+1} c_{n+1}^{-1} c_n^{-1} = c_{n+1} c_n c_{n-1}^{-1} : n \in \mathbb{Z} \rangle$
 $= G$

$\varphi: G \rightarrow A_5, c_{2k} \mapsto (12345)$

$c_{2k+1} \mapsto (14235)$

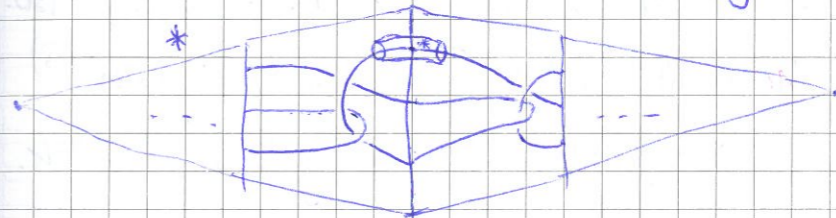
$n=2k: (12345)(14235)(14235)(12345) = (1)(2)(345)$

$(14235)(12345)(14235) = (1)(2)(345) \neq$

$n=2k+1: (14235)(12345)(12345)(14235) = (142)(3)(5)$

$(12345)(14235)(12345) = (142)(3)(5) //$

Korollar: Es gibt Einbettungen $f: S^2 \hookrightarrow S^3$ sodass das Komplement nicht aus offenen Bällen besteht, sogar $\pi_1(S^3 \setminus f(S^2), *) \neq \{1\}$.



$\square]-1,1[\times S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$
 $\downarrow \text{f}$
 $S^2 \hookrightarrow S^3$

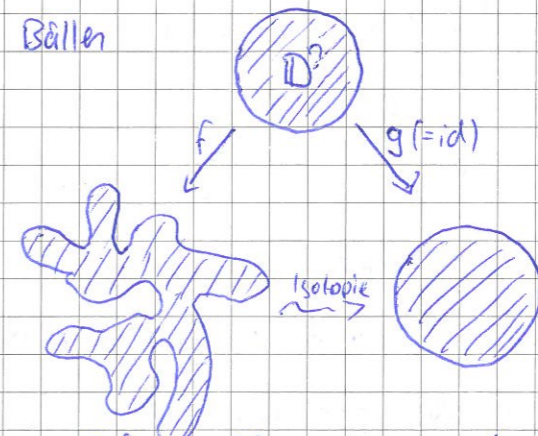
f ist einseitig wild.

Ebenso auch beidseitig //

Kap C Primfaktorzerlegung von Knoten

§C1 Der Satz von Alexander-Schoenflies für glatte Einbettungen $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$

Bewegung von Bällen



Satz (Milnor, Palais, Cerf * 1960, siehe Kirsch Thm 8.3.1)

Sei $M = \mathbb{R}^n$ oder allgemeiner eine glatte Mannigfaltigkeit ohne Rand, bzgl.

Satz (Milnor, Palais, Conf \approx 1960, siehe Hirsch Thm 8.3.1)

Sei $M = \mathbb{R}^n$ oder allgemeiner eine glatte n -Mfkt ohne Rand, zshgd.

Seien $f, g: D^k \rightarrow M$ Einbettungen, $0 \leq k \leq n$.

Falls $k = n \geq 1$, dann fordern wir, dass entweder M nicht-ori. ist oder f, g dasselbe Orientierungsverhalten haben.

Dann existiert eine glatte Isotopie von f nach g , d.h.

$H: [0,1] \times D^k \rightarrow M$ glatt, $H_0 = f$, $H_1 = g$, H_t glatte Einbettung für alle $t \in [0,1]$.

Zusatz: (Thm Isotopiefortsetzung) Es existiert $\tilde{H}: [0,1] \times M \rightarrow M$ glatt, $H_0 = \text{id}_M$, $H_1 \circ f = g$, $H_t: M \rightarrow M$ Diffeomorphismus für $t \in [0,1]$.

Anwendung: Ein (glatter) Knoten $\kappa: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ ist genau dann ^(glatt) iso-top zum trivialen Knoten $S^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, wenn κ einen glatten 2-Ball berandet, d.h. es existiert $f: D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ glatt mit $f|_{S^1} = \kappa$.

Bew.: " \Rightarrow " S^1 berandet D^2 , die Isotopie von S^1 nach κ überführt dies zu einer glatten Scheibe. Warum?
" \Leftarrow " mit obigem Satz.

Übung: polygonaler Fall

Bem.: Jede Einbettung $f: S^0 = \{\pm 1\} \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ zerlegt \mathbb{R}^1 in drei Komponenten $A \cdot B \cdot C$, $\mathbb{R} \setminus f(S^0) = A \cup B \cup C$, B beschränkt und $B \cong B^1$, $\bar{B} \cong D^1$.

Satz: (Jordan-Schönflies)

Jede (top/polygonale/glatte) Einbettung $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zerlegt \mathbb{R}^2 in zwei Komponenten, $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1) = A \cup B$, A, B offen & zshgd, A unbeschränkt, B beschränkt. Es existiert ein Homöo (pl-Homöo)/Diffeomorphismus $h: \mathbb{R}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^2$, $h \circ f(S^1) = S^1$.

Bew.: topologisch: aufwändig!

pl: siehe Topologie im Wis

Heute: glatt!

Sei $f: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ glatte Einbettung

z.z: f berandet eine glatte Kreisscheibe $F: D^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, $F|_{S^1} = f$.

Vorbereitung: Betrachte die Höhenfunktion $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x,y) = y$

1) $x \in S^1$ heißt regulär, wenn $(h \circ f)'(x) \neq 0$ gilt.

2) $x \in S^1$ heißt kritisch, wenn $(h \circ f)'(x) = 0$

• regulär kritisch: lokal $(h \circ f)(x) = x^2$ oder $-x^2$.

• singular kritisch: $(h \circ f)'(x) = (h \circ f)''(x) = 0 \leftarrow$ Dies wollen wir vermeiden!

Wir nennen $h \circ f: S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion, wenn nur Fälle (1) und (2a) auftreten.

Damit: Jeder krit. Punkt ist Min & Max

krit. Punkte liegen isoliert.

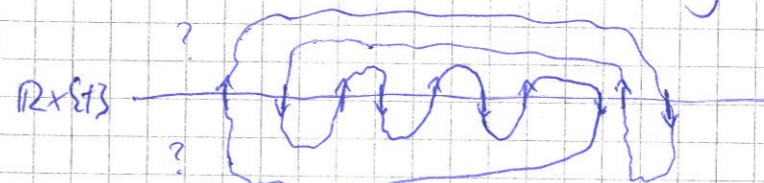
Da S^1 komp. ex. nur endl. viele krit. Pkte

Wir können sie auf versch. Höhen annehmen.

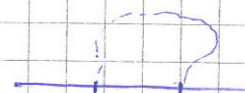
Satz (Morse) Nach beliebig kleiner Isotopie ist f von dieser Form (Morse-Einbettungen liegen dicht).

Chirurgie Sei $t \in \mathbb{R}$ ein reguläres Wert (auf $H_0 \pm t$ liegen keine krit. Pkte)

Dann schneidet $\mathbb{R} \times S^1$ die Einbettung f transversal in endlich vielen Punkten.

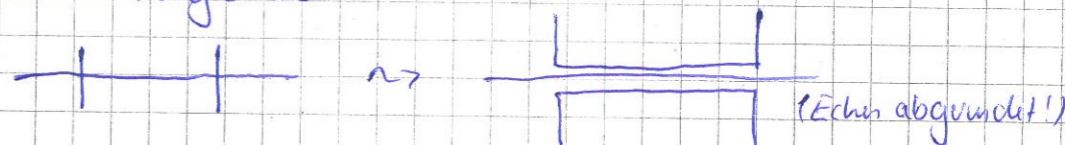


Es existiert ein Nachbarpaar der Form



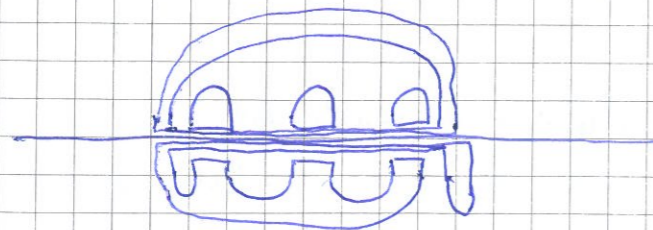
Wähle das erste von links.

Führe Chirurgie aus:



Per Induktion nach # Übergänge erhalten wir schließlich eine Kollktion von glatt eingebetteten Kreislinien.

Bsp:

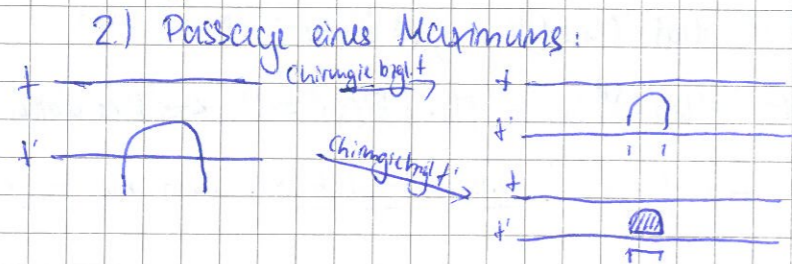


Behauptung: Jede Kreislinie in $\mathbb{R}^2 \times]t, \infty[$ berandet eine glatte Kreisscheibe.

Induktion:

0) Für $t > \max(hof)$ ist dies trivial.

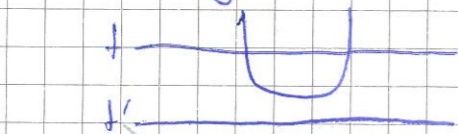
1) Gilt dies für t und enthält $[t', t]$ keine kritischen Werte, so gilt dies auch für t' .



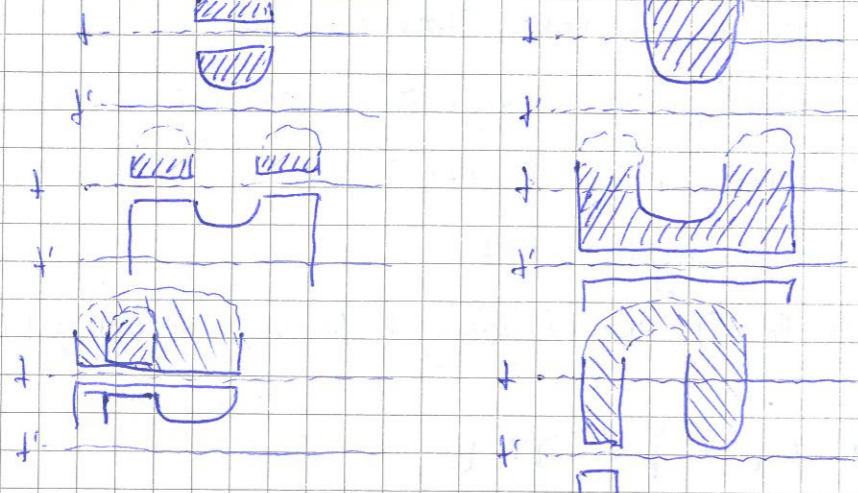
Aussage gilt für t

Aussage gilt auch für t'

3.) Passage eines Minimums:



Diskussion aller Fälle:



Per Induktion erreicht man schließlich $t < \min(hof)$ //

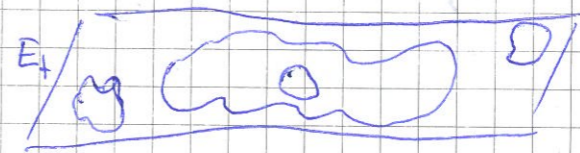
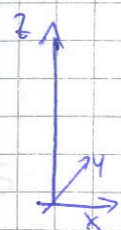
Satz (Alexander-Schönflies) Jede glatte (B) Einbettung $f: S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ berandet einen glatten 3-Ball $F: D^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^3, F|_{S^2} = f$.

Beweis: Nach beliebig kleiner Isotopie von f ist $h \circ f: S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ eine Morse-Funktion. Genauer $h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y, z) = z$, jeder kritische Punkt ist entweder Max (lokal $z = -x^2 - y^2$) oder Min (lokal $z = x^2 + y^2$) oder Sattelpunkt (lokal $z = x^2 - y^2$) (wieder endl. viele, isoliert). Sei t regulärer Wert.

Chirurgie entlang der Ebene $E_t: \mathbb{R}^2 \times \{t\}$

D.h. E_t schneidet f in endlich vielen glatten Kreislinien.

(implizite Fkt. lokal, Klassifikation global)



Jede dieser Kreislinien berandet eine Scheibe.

Wähle eine innerste Kreisscheibe und führe Chirurgie aus.



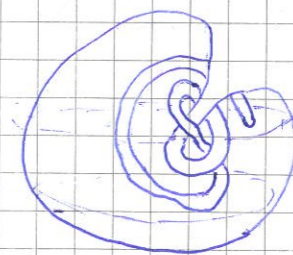
Nach endlich vielen Schritten sind alle Kreislinien damit wegoperiert.

Beh: In $\mathbb{R}^2 \times]t, \infty[$ liegen endlich ^{nw} viele glatte 2-Sphären und jede berandet einen glatten 3-Ball.

Induktion über die Höhe.

glatte Einbettungen: $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ bzw. $S^2 \xrightarrow{\cong} S \subset \mathbb{R}^3$

3.6.15

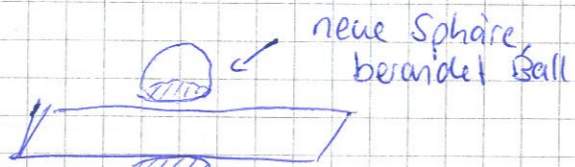
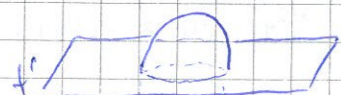
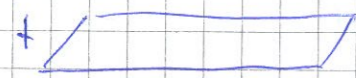


Chirurgie entlang $E_t = \mathbb{R}^2 \times \{t\}$ liefert S_t disjunkt zu E_t .

Beh: Oberhalb von E_+ besteht S_+ aus glatter Sphäre und jeckl beendet einen glatten Ball.

Induktion über t .

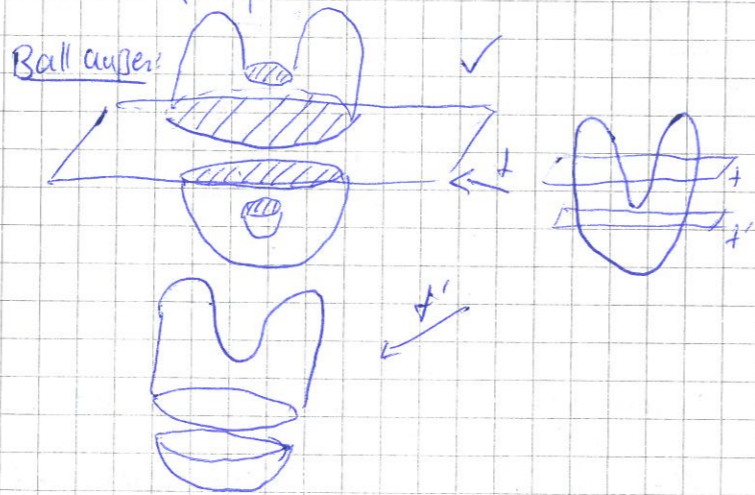
- Für $t > \max(h, f)$ ist dies trivial
- Gilt die Aussage für t und enthält $[t, t']$ keine krit. Werte, so auch für t' .
- Passage eines Maximums.



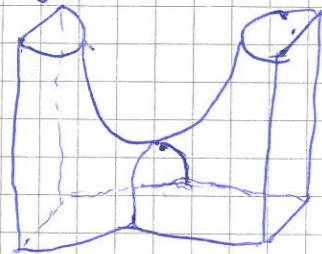
• Passage eines Minimums:



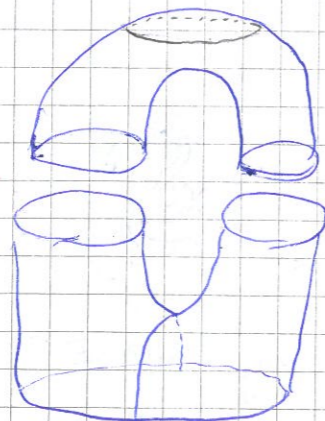
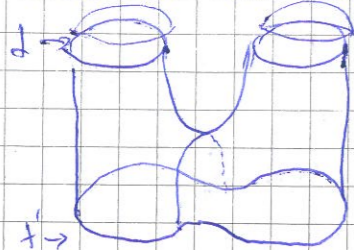
Ball innen:



Passage eines Sattelpunktes:

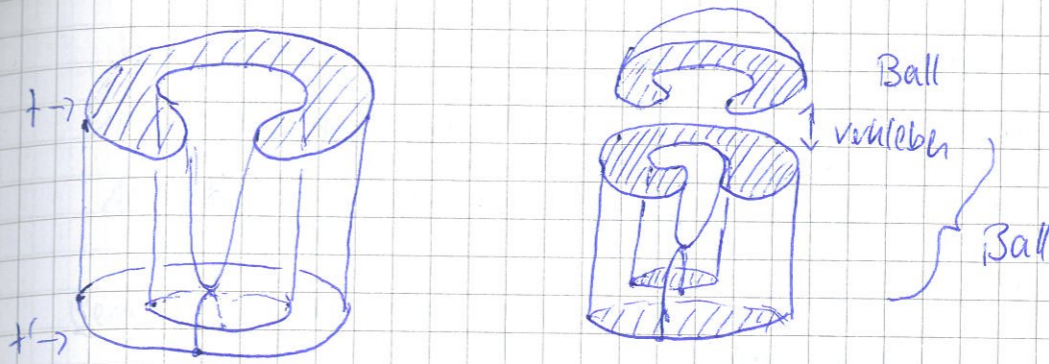


Diskussion aller Fälle

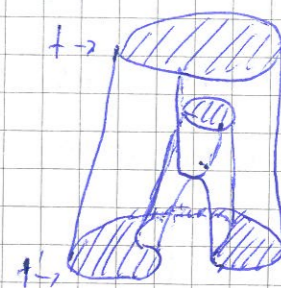
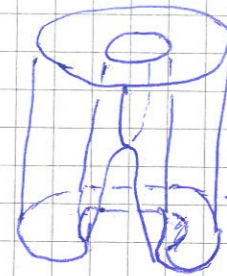
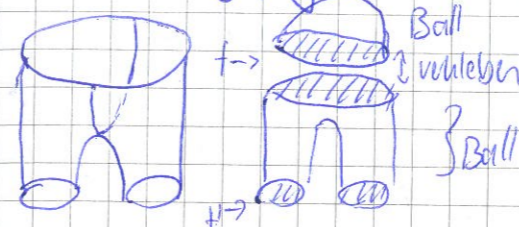


Unmöglich! Warum? Weil ein Loch nach Voraussetzung nicht möglich ist? Weil wir das Geschlecht nicht wieder kleiner machen.

"Das können Sie, das tragen Sie alle, das ist eine Hose."



2 weitere Fälle gespiegelt:



Das sind alle möglichen Fälle (warum?)

Schlieflich gilt für $t < \min(h, f)$: Die glatte Sphäre $S \subset \mathbb{R}^3$ beendet einen glatten Ball.

$S^0 \hookrightarrow \mathbb{R}^1$ bennet

$S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ Jordan-Schönflies

$S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ Alexander-Schönflies.

$\Delta S^3 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$ offenes Problem (Glatte Schönflies-Vermutung in \mathbb{R}^4)

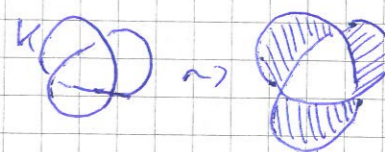
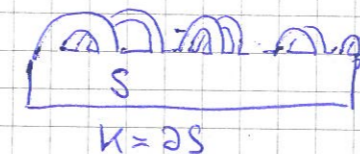
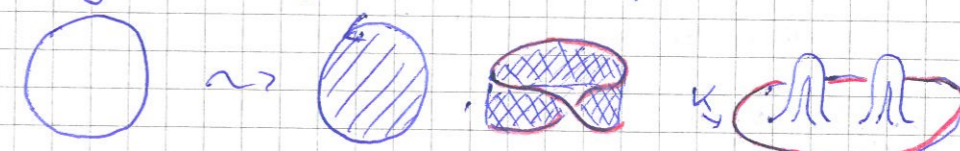
$S^4 \hookrightarrow \mathbb{R}^5$

$S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ für $n \geq 5$ } Dies gilt dank h-Borelismus

§ C2 Seifertflächen und Knotengeslecht

Beob/Frage: Beendet jeder Knoten eine lichte Fläche? orientiert?

triviale Knoten:



nicht orientierbar

Satz: (Seifert 1934, Poincaré 1930)

Zu jeder orientierten Verschlingung $K \subset \mathbb{R}^3$ existiert eine kompakte, orientierte, zusammenhängende Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit $\partial S = K$. (*)

Beweis: Seifert-Algorithmus.

Stelle K als Diagramm in \mathbb{R}^2 dar.


Löse jede Kreuzung auf: 

Es bleiben Kreislinien in \mathbb{R}^2 . Jede berührt eine Weisscheibe.

Verklebe je nach Wertung:



Wir erhalten eine upht. or. Fläche S mit $\partial S = K$.

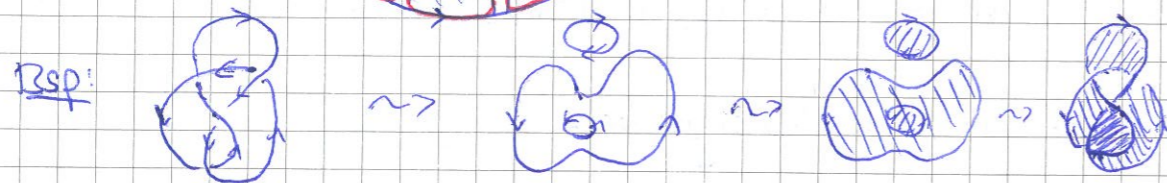
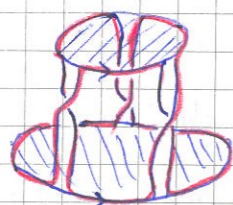
Ist S noch nicht zshgd, so klebe Zylinder an: 

(*) Eine solche Fläche heißt Seifert-Fläche zu K .

Heißt jede orientierbare Fläche zu K Seifertfläche? Oder nur durch Algorithmus generierte? Oder ist dies egal?



3D-Darstellung:



Erinnerung: Flächenklassifikation

$$S \cong F_{g,r}^+, \quad g \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{N}_{\geq 1}$$



Insbesondere erhalten wir $g(S) \in \mathbb{N}$

Def: Das Geschlecht eines Knotens K ist $g(K) := \min \{g(S) \mid \partial S = K\}$

$$K = \emptyset \Leftrightarrow g(K) = 0$$

Kleeblattschlinge: $g(S_1) = 1$ ↳ Konstruktion

Achtwinkeln $g(K_1) = 1$ ebenso ↳ nicht-triv. Knoten

Bem: $K \sim \emptyset \Leftrightarrow g(K) = 0$

" \Rightarrow " $T = \emptyset \rightsquigarrow S = \text{Disk}$, $g(S) = 0$

$T \sim K$
 $\partial S \cong S' \rightarrow S \sim S'$, damit $g(K) = 0$

" \Leftarrow " Sei $g(K) = 0$, d.h. $\exists S \subset \mathbb{R}^3$, $\partial S = K$, $S \cong D^2$

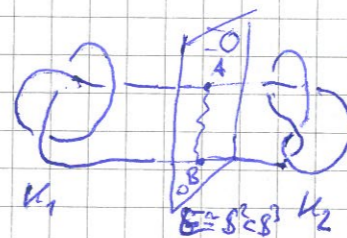
$\Rightarrow \exists$ Isotopie pl.: $S \rightsquigarrow \Delta$, glatt $S \rightsquigarrow \text{Disk}$
 $K \rightsquigarrow \Delta$ $K \rightsquigarrow \emptyset$

$\partial S = \partial S' \Rightarrow S \sim S'$?
gilt nur mit $S = \emptyset$ oder?
Dann mit $S = \Delta$?

8.6.15

Additivität des Geschlechts

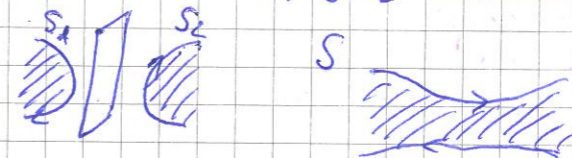
Satz: Für alle Knoten K_1, K_2 gilt $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$



$S_1 \# S_2$?

Bew: " \leq " Sei $K_1 = \partial S_1$, $g(K_1) = g(S_1)$ (minimales Geschlecht)

Dann ist $S = S_1 \# S_2$ eine Seifert-Fläche für $K = K_1 \# K_2$:



Damit gilt: $g(K_1 \# K_2) \leq g(S) = g(S_1) + g(S_2)$

$$= g(K_1) + g(K_2) \quad g(S) = g(K)$$

" \geq " Sei S eine ^{minimale} Seifertfläche zu $\partial S = K = K_1 \# K_2$. Sei

$D \subset \mathbb{R}^3$ ein Ball (wie in der Skizze), der K in die Faktoren K_1, K_2 teilt. o.E. sei $E = \partial D$ glatt ($E = \partial D \cong S^1$, $D \cong D^2$)

Nach Isotopie von S können wir Transversalität $S \pitchfork E$ annehmen. Somit besteht $S \cap E$ aus n disjunkten Kreislinien und einem Segment von A nach B .

1. Fall $n=0$: Wir können S aufschneiden

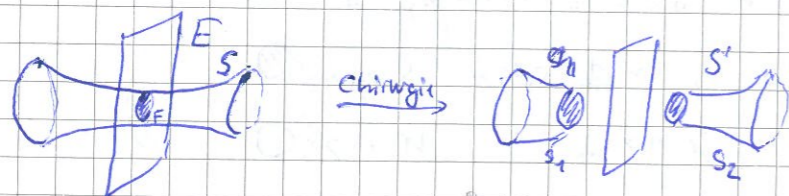


Somit $S = S_1 \# S_2$ Wann geht das nicht? Ah, nur unnötiges Zeug

mit $g(S) = g(S_1) + g(S_2) \geq g(U_1) + g(U_2)$.

2. $n \geq 1$: Wähle einen innersten Kreis, dieser berandet eine Scheibe

$D^2 \cong F \in E, F \cap S = \partial F$



Chirurgie warum? Weil wir nur noch 1-mal weniger schneiden können, also $g(S') = g(S) - 1$

Eulercharakteristik
Fläche?
 $= E - K + F$
Kü...
S orientierbar:
 $\chi(S) = 2 - 2g$
g Geschlecht

Es gilt $\chi(S') = \chi(S) + 2$. Wähle S' zshgd, so $g(S') = g(S) - 1$
(Erinnerung: $\chi(F_2^+) = 2 - 2g$)

Wegen $\partial S' = \partial S = K$ ist dies nicht möglich. S hatte ja schon minimales Geschlecht.

Also ist S' nicht zshgd, $S' = S_1 \cup S_2$

Da K zshgd ist, folgt $\partial S_1 = K, \partial S_2 = \emptyset$.

(Notwendigerweise gilt $S_2 \cong S^2$)

Wir können S_2 löschen und erhalten S_1 mit $\partial S_1 = K, g(S_1) = g(S)$, und

$S_1 \cap E$ hat eine Komp weniger.

Per Induktion erreichen wir den Fall (1) . //

Mer: $A \# B \sim 0$ folgt $A \sim 0, B \sim 0$.

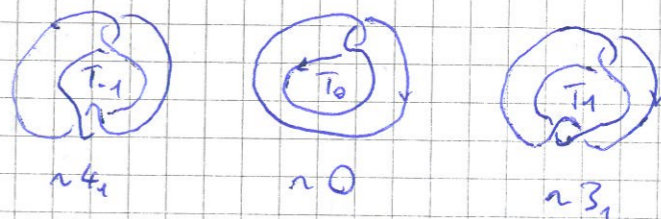
Def: Ein Knotentyp heißt prim, wenn aus $K = A \# B$ stets entweder $A = 0$ oder $B = 0$ folgt.

Prop: Knoten von Geschlecht 1 sind prim.

Bew: Sei $K = A \# B, g(K) = 1$
 $\Rightarrow g(A) + g(B) = 1 \Rightarrow g(A)=1, g(B)=0$ oder $g(A)=0, g(B)=1$

Bsp: $3_1, 4_1$ sind prim.

Prop: Es gibt unendlich viele Primknotentypen, z.B. die Twistknoten $T_n, n \in \mathbb{N}_{>0}$.



Bew: Es gilt $g(T_n) \leq 1$ nach Skizze

Für $n \neq 0$ gilt $T_n \neq 0$ (mit Färbungszahl bzw Alexander-Polynom)

und zudem $T_m \neq T_n$ für $m \neq n$. //

Satz: Jeder Knotentyp ist verbindene Summe von Primknotentypen, d.h. es existieren P_1, \dots, P_n Prim mit $K = P_1 \# \dots \# P_n$.

Bew: Induktion über $g(K)$

$g(K) = 0 \Rightarrow K = 0, n = 0$

$g(K) = 1 \Rightarrow K = D_1, n = 1$

$g(K) \geq 2$: Zwei Fälle a) K prim $\Rightarrow K = P_1, n = 1$

b) K nicht prim $\Rightarrow \exists A, B \neq 0$ mit $K = A \# B$

$g(K) = g(A) + g(B), g(A), g(B) \geq 1$

$\Rightarrow g(A), g(B) < g(K)$

IV: $A = P_1 \# \dots \# P_m, B = P_{m+1} \# \dots \# P_n$

$\Rightarrow K = A \# B = P_1 \# \dots \# P_n$ //

Ziel: Eindeutigkeit!

Analogie $(\mathbb{N}_{\geq 1}, \cdot, 1)$. Nicht eindeutig z.B. in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ bzw.

Gegenspiele: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] \subset \mathbb{C}$ (Wunderbare Übung!)

$\mathbb{R}[X] = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f'(0) = 0\} = \mathbb{R}[X^2, X^3]$

$= \{f(x) = a_0 + a_2 x^2 + \dots + a_n x^{2n}\}$

$X^6 = X^2 \cdot X^2 \cdot X^2 = X^3 \cdot X^3$

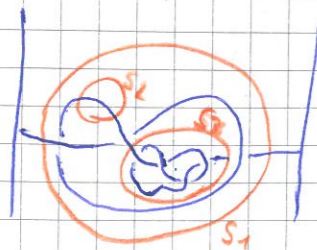
$(M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}, \cdot, 1)$ Monoid

$13^6 = 13^2 \cdot 13^2 \cdot 13^2 = 13^3 \cdot 13^3$

Oder $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ (Uhr) $\Rightarrow 2 = 2 \cdot 1, 3 = 3 \cdot 1, 4 = 4 \cdot 1, 6 = 3 \cdot 2$

(Gibt es Primzahlen?)

Betrachte einen langen Knoten K (1-sellingsel)



Sei $S = S_1 \cup \dots \cup S_n$ eine Familie disjunkter glatter 2-Sphären $S_i \subset \mathbb{R}^3$, die den Knoten transversal je höchstens zwei Punkten schneiden.

Jeder Ball D_i beinhaltet einen Knoten K_i (oder nicht).

⚠ Enthält D_i weitere Bälle so sind diese zur D_i von K_i vorher auszuwählen und durch Triviale zu ersetzen.

Bsp: $K_3 = 4_1, K_2 = 0, K_1 = 3_1$

Drop: Es gilt $K = K_1 \# \dots \# K_n$

Def: Nach Löschung aller trivialen und leeren Beiträge erhalten wir $K = P_1 \# \dots \# P_m$ ($m \leq n$) mit P_i nicht-trivial. Wir sagen, dass S den Knoten K in P_1, \dots, P_m zerlegt.

LEM: Sind P_1, \dots, P_m prim und $S^* \supset S$ eine Verfeinerung (durch Hinzufügen weiterer 2-Sphären), dann zerlegt S^* den Knoten K in dieselben Primknoten P_1, \dots, P_m .

Bew: Wir finden $P_i = P_i' \# P_i''$, damit klar.

Satz: Sei K ein Knotentyp und $P_1, \dots, P_m, Q_1, \dots, Q_n$ prim, und $K = P_1 \# \dots \# P_m = Q_1 \# \dots \# Q_n$. Dann gilt $m=n$ und nach Umordnung $P_i = Q_i, \dots, P_m = Q_n$.

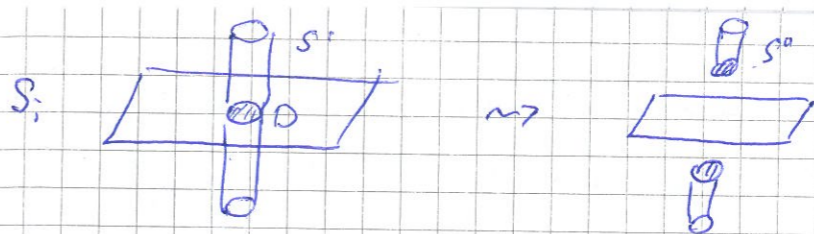
Bew: S zerlege K in P_1, \dots, P_m

S' zerlege K in Q_1, \dots, Q_n

anschauen!

1. Fall: Wenn $S \cap S' = \emptyset$, dann betrachte $S^* = S \cup S'$. Wegen $S^* \supset S$ zerlegt S^* in P_1, \dots, P_m , wegen $S^* \supset S'$ zerlegt S^* in Q_1, \dots, Q_n . } Eindeutig bis auf Umordnung!

2. Fall: $S \cap S' \neq \emptyset$. Nach Isotopie von S' transversal zu S .
 $\Rightarrow S \cap S'$ ist Familie disjunkter glatter Kreislinien.



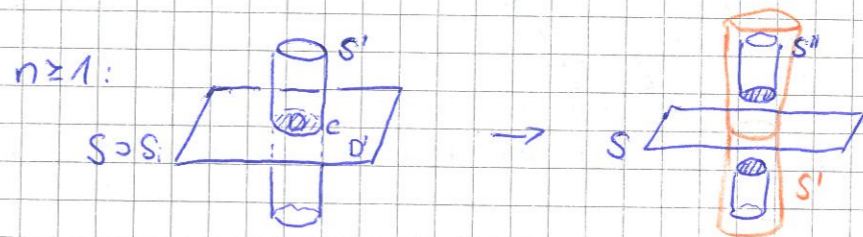
Diskussion aller Fälle!

2. Fall: $S \cap S' \neq \emptyset \Rightarrow$ Chirurgie.

Seien S, S' transversal, dann ist $S \cap S'$ eine Familie von n Kreislinien.

10.6.15

Induktion: $n=0$ ist Fall 1



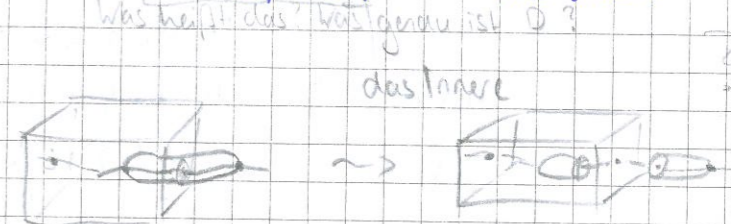
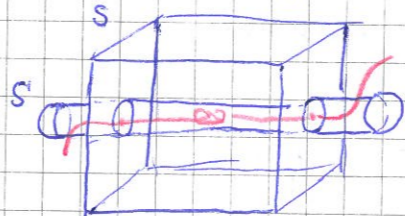
Detail: Schrumpfe S'' etwas, so dass $S'' \cap S' = \emptyset$

Jede Kreislinie $C \subset S \cap S'$ berandet eine Kreisscheibe $D \subset S_i \subset S$.

Nach Voraussetzung ist $|S_i \cap K| \in \{0, 2\}$

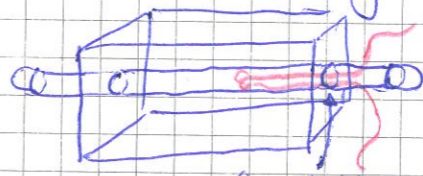
Falls $|S_i \cap K| = 0$, unterscheide: $|D \cap K| = \emptyset$, denn klar.

Wenn $|D \cap K| = 2$, ersetze D durch $D' = S_i \setminus D$, denn wie zuvor.



Auch in diesem Fall geht alles gut: Auch S'' erfüllt die Bedingung, dass jede Komp. S_j den Knoten K in höchstens zwei Punkten schneidet.

⚠ Das wäre ohne Sorgfalt leicht falsch.



Chirurgie wie zerstört diese Eigenschaft $|S_j \cap K| \leq 2$

Nach n Chirurgien erhalten wir aus S' das neue Sphärensystem S^* disjunkt zu S . (und nach Schrumpfung auch disjunkt zu S')

Die Zerlegung von K durch S' in Q_1, \dots, Q_n ist prim.

Die Zerlegung durch S^* ist feiner, also erhalten wir dieselbe Zerlegung!

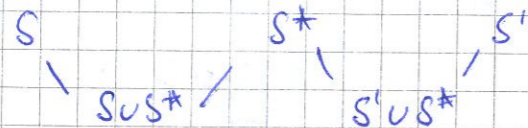
Per Induktion gilt dies schließlich für S^* .

Da $S \cap S^* = \emptyset$, auch für $S \cup S^*$.

Wie in Fall 1: Die Zerlegung von K durch S in P_1, \dots, P_m ist prim, ebenso durch $S \cup S^*$.

$\Rightarrow m=n$ und nach Umordnung $P_1 = Q_1, \dots, P_n = Q_n$ //

Bem: Schematisch



Bem: In Knotentabellen werden daher meist nur Primknoten aufgeführt.

Kapitel D : Seifertform, Signatur und Alexander-Polynom

Ziel: Ausgehend von einem Knoten K konstruieren wir eine Seifert-

Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$, $\partial S = K$. Daraus gewinnen wir die Seifert-

Form $\Theta_S : H_1 S \times H_1 S \rightarrow \mathbb{Z}$ (Matrix)

$\cdot \pi_1(S)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$ nach Flächenklassif.

und das Alexander-Polynom

$$\Delta(K) := \det (q^{-1} \Theta - q \Theta^+) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$$

Dies ist unabhängig von der gewählten Fläche S und daher eine

Invariante des Knotentyps von K .

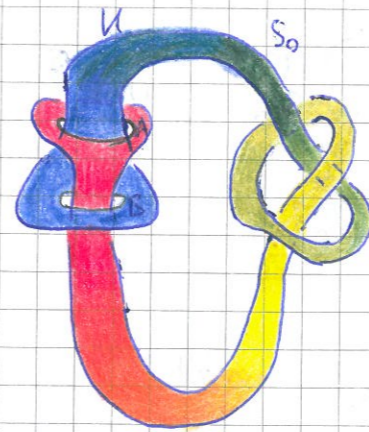
§ D1 Äquivalenz von Seifert-Flächen

Bem: Sei K ein Knoten. Es gibt zu K unendlich viele Seifertflächen

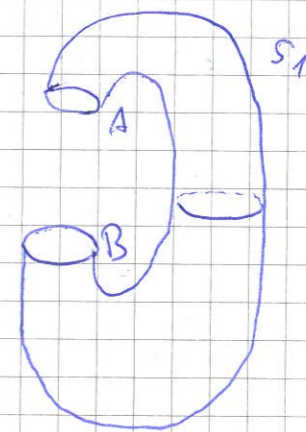


Auch Seifert-Flächen minimalen Geschlechtes sind nicht eindeutig.

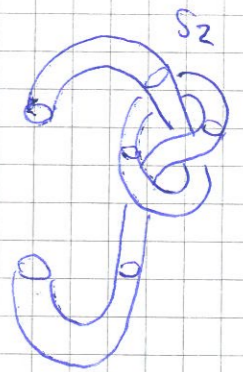
(d.h. zueinander isotop).



$$\partial S_0 = K \cup \partial U \cup B$$



$$\begin{aligned} \partial S_1 &= A \cup B \\ S_1 \cap S_0 &= A \cup B \\ \Rightarrow S_0 \cup S_1 & \text{ Seifertfläche zu } K \end{aligned}$$



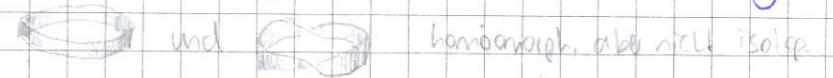
$$\begin{aligned} \partial S_2 &= A \cup B \\ S_0 \cap S_2 &= A \cup B \\ \Rightarrow S_0 \cup S_2 & \text{ Seifertfläche zu } K \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} g(S_0 \cup S_1) &= 1 \\ g(S_0 \cup S_2) &= 1 \end{aligned} \right\} \text{ Als (abstrakte) Flächen gilt } S_0 \cup S_1 \cong S_0 \cup S_2 \cong \text{torus} \cong F_{1,1}^+$$

(ist "≅" eindeutig definiert?)

$\mathbb{Z} \cdot \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, damit minimales Geschlecht.

D.h. alle Seifert-Flächen S zu K mit minimalem Geschlecht sind untereinander homöomorph (nach Flächenklassifikation $\cong F_{g,1}^+$) Aber \mathcal{A} sind ihre Einbettungen im \mathbb{R}^3 nicht isotop.



Chirurgie auf Seifert-Flächen

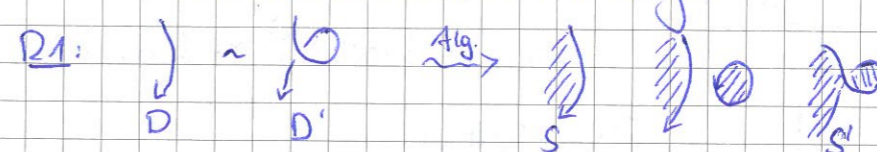
Die folgende Chirurgie (eingebettet im \mathbb{R}^3) ändert die Fläche S zu S' nicht aber ihren Rand $\partial S = \partial S' = K$.

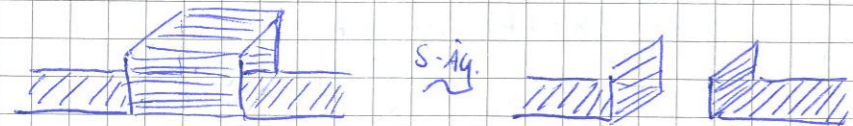
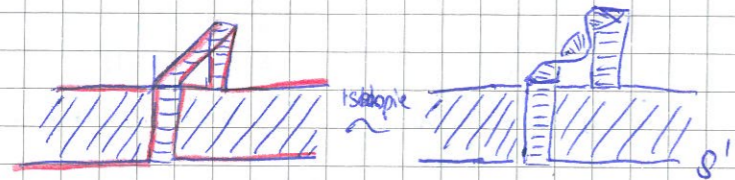
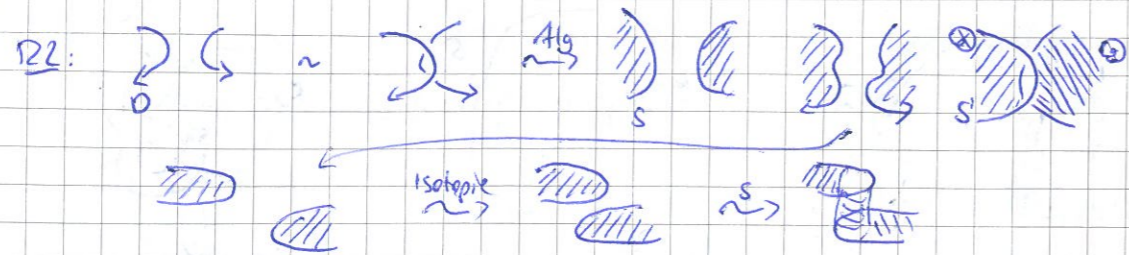


Satz: Je zwei Seifert-Flächen S, S' zum selben Knoten K lassen sich ineinander überführen durch eine endliche Folge solcher Chirurgien und Isotopie (S -Äquivalenz).
Was ist S-Äquivalenz?

Bew: 1) Betrachte zunächst nur die Seifert-Flächen, die aus dem Seifert-Algorithmus entstehen. $D \mapsto S$ kanonische Seifert-Fläche zum Diagramm D

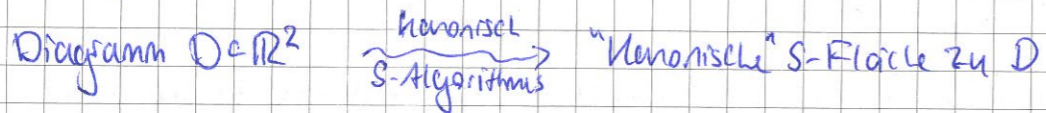
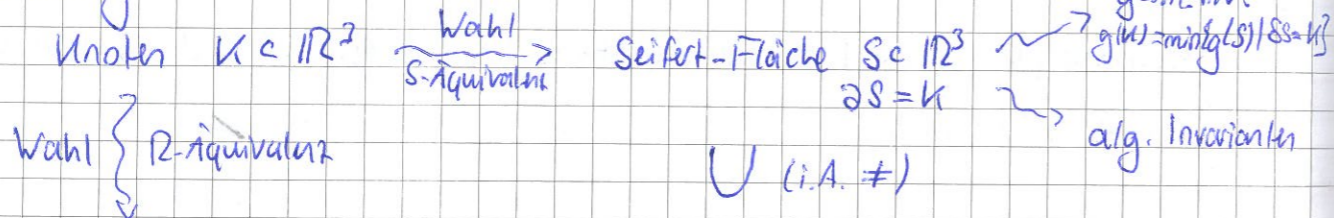
Beobachte den Effekt von R-Zügen:





R3: schöne aber nicht ganz leichte Übung!

Erinnerung:

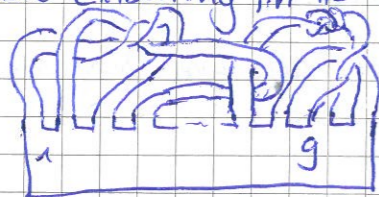


Lemma: Jede S-Fläche zu K ist S-äquivalent zu einer kanonischen S-Fläche (d.h. aus dem Algorithmus angewandt auf ein Diagramm zu K).

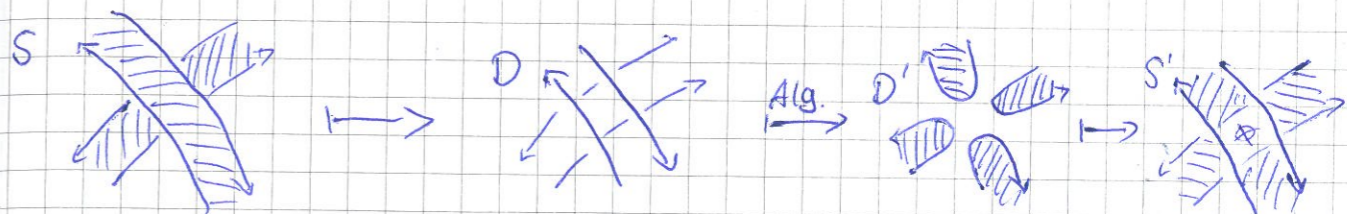
Bew: Wir nutzen die Flächenklassifikation



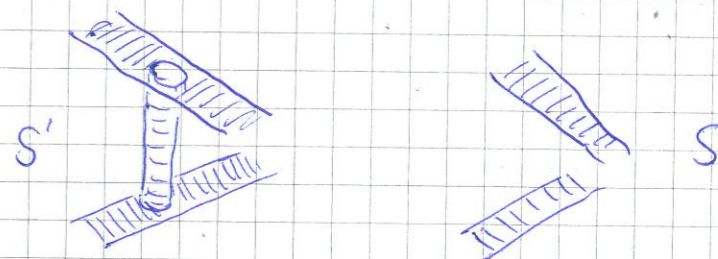
Die Einbettung im \mathbb{R}^3 können wir mod. Isotopie so darstellen:



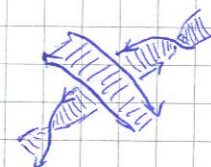
Wir betrachten $D = \partial S$ als Knotendiagramm und wenden den S-Algorithmus an. Die so entstehende Fläche S' ist S-äquivalent zur ursp. Fläche S .



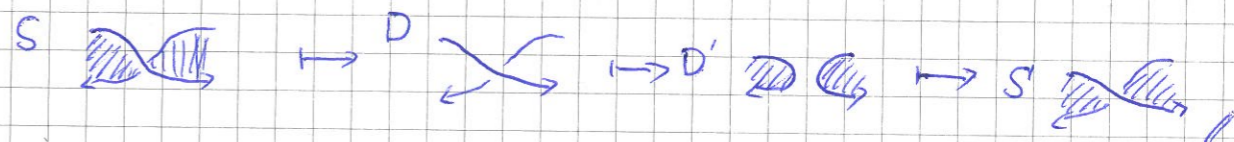
Seitenansicht:



R2,3

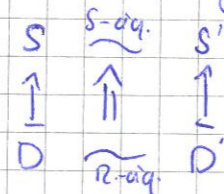


Damit wie zuvor.



Lemma: Je zwei kanonische S-Flächen zu K sind S-äquivalent.

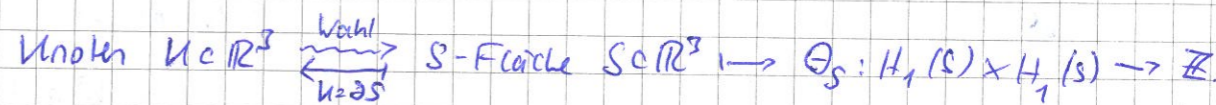
Bew: Betrachte R-Züge von D nach D'



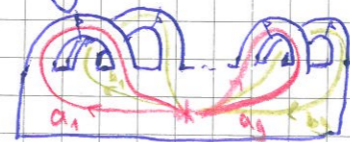
R1, R2 sind leicht \rightarrow s. letzte U.

R3 ist reichreich \rightarrow Übung. //

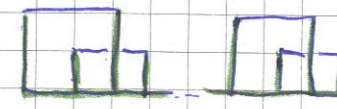
§D2 Seifert-Form



Erinnerung: $\pi_1(S, *) = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid \rightarrow \cong F_{2g}$ (freie Gruppe auf $2g$ Erzeugern)



Homotopie-Äquivalenz



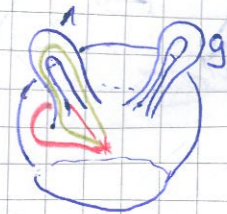
Graph K

Spannbaum T

$\pi_1(K) \cong \langle S \in K \setminus T \mid \rightarrow \text{KAT?}$

Abelschmachung: $H_1(S) := \pi_1(S)_{ab} \cong \mathbb{Z}^{2g}$, freie abelsche Gruppe erz. von $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$.
 Wir können den Fußpunkt vergessen.

Alternativ im Henkelmodell



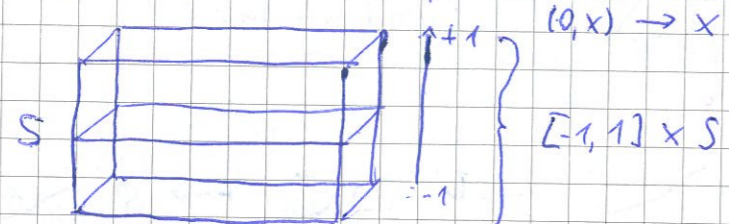
abelsch
gemacht



Wir wollen messen, wie S in \mathbb{R}^3 "verschlungen" ist.

Prop: Jede Seifert-Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ lässt sich aufwickeln zu

$$[-1, 1] \times S \hookrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \{0\} \times S \xrightarrow{f} S$$



Dies ist eindeutig bis auf Isotopie bei fester Fläche S .

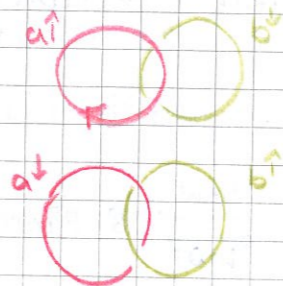
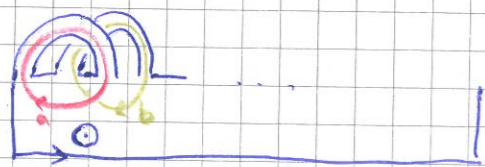
Jede Kurve α auf S definiert $\alpha^{\uparrow} = \{1\} \times \alpha$ und $\alpha^{\downarrow} = \{-1\} \times \alpha$.

Wir definieren $\Theta_S: H_1 S \times H_1 S \rightarrow \mathbb{Z}$

$$(\alpha, \beta) \rightarrow \text{lk}(\alpha^{\downarrow}, \beta^{\uparrow}) \quad (\text{lk Verschlingungszahl, S. 15})$$

Das ist eine bilineare Abb. Nach Wahl einer Basis $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \in H_1 S$ wie oben entspricht dies einer Matrix $\mathbb{Z}^{2g \times 2g}$

Triviales Beispiel



$$\text{lk}(a_1^{\uparrow}, b_1^{\downarrow}) = 0$$

$$= \text{lk}(b_1^{\downarrow}, a_1^{\uparrow})$$

$$\text{lk}(a_2^{\downarrow}, b_2^{\uparrow}) = 1$$

$$= \text{lk}(b_2^{\uparrow}, a_2^{\downarrow})$$

Für die Stenoclembettung erhalten wir

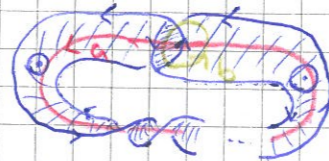
$$\Theta_S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & \dots & a_g & b_g \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_1 & b_1 & \dots & a_g & b_g \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ c_g & b_g & \dots & a_g & b_g \end{pmatrix}$$

Diagonale müssen nicht nur Null sein!

Beispiel: Twist-Knoten

$$2S = T_k$$

$$g(S) = 1$$



$2k$ Kreuzungen = k volle Drehungen

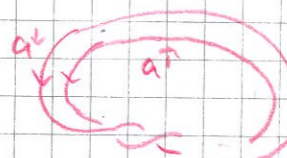
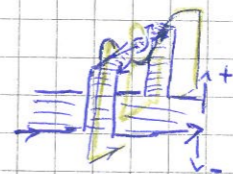
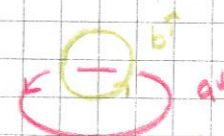
$$\Theta_S = \begin{pmatrix} a & b \\ q & -k & 0 \\ b & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{lk}(a^{\downarrow}, b_1^{\uparrow}) = 0$$

$$\text{lk}(b_1^{\downarrow}, a_1^{\uparrow}) = -1$$

$$\text{lk}(b_2^{\downarrow}, b_2^{\uparrow}) = -1$$

$$\text{lk}(a_2^{\downarrow}, b_1^{\uparrow}) = -k$$



$(\downarrow^+ \downarrow^-)$

Ziel: $\det \Theta_S$ invariant? nein.

$|\det(\Theta_S + \Theta_S^T)|$? Ja!

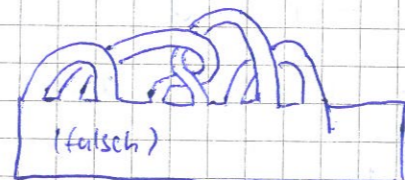
$\text{sign}(\Theta_S + \Theta_S^T)$ Ja!

$\det(q^{-1}\Theta_S + q\Theta_S^T) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}^{\pm 1}]$? Ja!

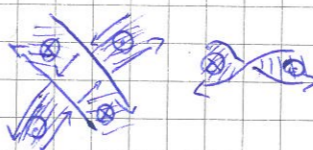
Satz: (aus Übung) Für jeden Knoten K gibt es ein Diagramm D mit orientierbarer Seifert-Fläche.

Beweis: $K \rightsquigarrow D \rightsquigarrow S$ Seifert-Fläche (orientierbar!)

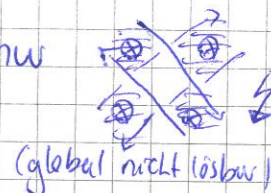
Stelle S in Bandform dar:



Es genügt, Kreuzungen der folgenden Form zu benutzen:



Vermeiden werden muss nur (und kann!)



(global nicht lösbar)

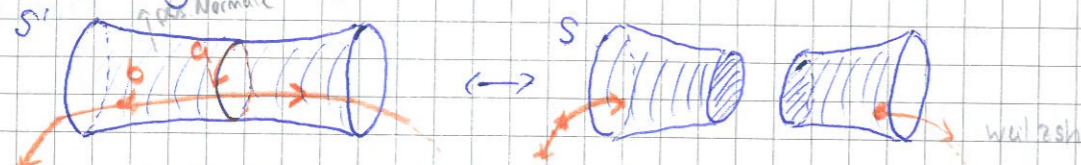
Knoten $K \in \mathbb{R}^3 \rightsquigarrow$ Seifert-Fläche $S \subset \mathbb{R}^3, \partial S = K$ 17.6.15

\rightsquigarrow Seifert-Form $\Theta_S: H_1 S \times H_1 S \rightarrow \mathbb{Z}$

\rightsquigarrow Basiswahl, S-Matrix $\mathbb{Z}^{2g} \times \mathbb{Z}^{2g} \rightarrow \mathbb{Z}$

Heute: \rightsquigarrow Invarianten: Determinante, Signatur, Alexanderpolynom

Auswirkung der S-Äquivalenz auf die S-Form:



$$H_1 S \rightarrow H_1 S' = H_1 S \oplus \langle a \rangle \oplus \langle b \rangle \quad H_1 S$$

$$\pi_1(S', *) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2, a, b \rangle \rightarrow \pi_1(S, *) = \langle a_1, b_1, a_2, b_2 \rangle$$

$$\Theta_{S'} = \begin{pmatrix} \Theta_S & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \quad (k(a^t, b^t)) \text{ Basiswechsel} \sim \begin{pmatrix} \Theta_S & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Def: Zwei Matrizen $M \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$ und $M' \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$ heißen S-äquivalent,

wenn sie sich durch eine endliche Folge solcher Operationen unterscheiden:

1) Kongruenz / Basiswechsel: $M' = T^t M T$ mit $T \in GL_{2n} \mathbb{Z}$

2) Stabilisierung wie oben $M' = \begin{pmatrix} M & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

Prop: $|\det(\Theta_S + \Theta_S^*)|$ ist unabhängig von der Wahl der Basis von $H_1 S$ und sogar von der Wahl der Seifert-Fläche S zum Knoten $K = \partial S$.

Somit ist $|\det(K)| := |\det(\Theta_S + \Theta_S^*)|$ eine Invariante des Knotens

Beweis: Stelle $\Theta_S: H_1 S \times H_1 S \rightarrow \mathbb{Z}$ dar durch eine Matrix $M \in \mathbb{Z}^{2g \times 2g}$, hierzu Basiswahl.

(1) Basiswechsel: $M' = T^t M T$ mit $T \in GL_{2g} \mathbb{Z}$

$$M' + M'^t = T^t M T + T^t M^t T = T^t (M + M^t) T$$

$$\det(M' + M'^t) = \det(T^t) \det(M + M^t) \det(T) = \det(M + M^t)$$

weil $\det(T) = \det(T^t) \in \{\pm 1\}$

(2) Stabilisierung: $M' = \begin{pmatrix} M & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$$M' + M'^t = \begin{pmatrix} M + M^t & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} M + M^t & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M' + M'^t) = -\det(M + M^t)$$

Wir retten das Verwirren:

$$\det(K) := (-1)^{\text{sg}(S)} \det(\Theta_S + \Theta_S^t) = (-i)^{\text{sg}(S)} \det(\Theta_S + \Theta_S^t) \quad (\text{wenn man sich das überlegt})$$

$$= \det(-i \Theta_S - i \Theta_S^t) \quad \text{und was heißt retten?}$$

Beispiel: Twistknoten T_k

$2g$ weil 2 Bänder pro Geschlecht

$$\text{Seifert-Form } S_k = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Theta_k + \Theta_k^t = \begin{pmatrix} -2k & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|\det(T_k)| = |4k - 1|$$

$$\det(T_k) = (-1)^1 \cdot (4k - 1) = 1 - 4k$$

Dies unterscheidet alle Twistknoten!

(Anwendung: Für $k \neq 0$ ist T_k prim.)

$$T_0 = \bigcirc \text{ trivial} \Rightarrow \det 0 = 1$$

$$T_1 = \textcircled{1} = 3_1 \Rightarrow \det 3_1 = -3$$

$$T_2 = \textcircled{2} = 4_1 \Rightarrow \det 4_1 = 5$$

Prop: Die Signatur von $\Theta_S + \Theta_S^t$ ist eine Invariante des Knotens K , geschrieben $\text{sign}(K) := \text{sign}(\Theta_S + \Theta_S^t)$

Bew:

(1) Basiswechsel: $M' = T^t M T$ mit $T \in GL_{2g} \mathbb{Z}$.

$$\exists A \in O_{2g} \mathbb{R}: A^t = A^{-1}, A^t M M^t A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{sign}(M + M^t) = \# \{k | \lambda_k > 0\} - \# \{k | \lambda_k < 0\}$$

$$\underbrace{A^t T^t M^t T A}_{\in GL_{2g} \mathbb{R}} = A^t M M^t A = \text{---} \rightarrow = \sum_{k=1}^{2g} \text{sign}(\lambda_k)$$

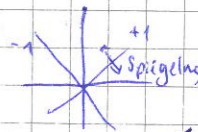
Trägheitssatz von Sylvester! $\Rightarrow \text{Sign } M' = \text{sign } M$

$$(2) \text{ Stabilisierung: } M' + M'^t \sim \begin{pmatrix} M + M^t & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & - & 0 & 0 \\ * & - & * & 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & * \\ 0 & * \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Bsp: (Forts.)

$$\Theta_k + \Theta_k^t = \begin{pmatrix} -2k & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Polynom: } \det \begin{pmatrix} x+2k & 1 \\ 1 & x+2 \end{pmatrix}$$

$$= (x+2k)(x+2) - 1 = x^2 + (2k+2)x + (4k-1)$$



Probe: $k=0: x^2 + 2x - 1 = (x - (-1 + \sqrt{2})) (x - (-1 - \sqrt{2}))$

$$\text{sign}(T_0) = 0$$

$k=1: x^2+6x+3$ zwei EW $\neq 0 \Rightarrow \text{sign}(T_1) = -2$

$k=-1: x^2+0x-5 \Rightarrow \text{sign}(T_{-1}) = 0$

$k=-2: x^2-2x-9 \Rightarrow \text{sign}(T_{-2}) = 0$

$$\text{sign}(T_k) = \begin{cases} 0 & \text{für } k \leq 0 \\ -2 & \text{für } k \geq 1 \end{cases}$$

Algorithmische Fragen:

1) Wie berechnet man effizient $\det(X_{1 \times n} - A)$?

2) Wie bestimmt man hieraus die Signatur?

Vorzeichenregel von Descartes: Sei $P \in \mathbb{R}[x]_n$ ein (normiertes) reelles

Polynom vom Grad n mit n reellen Nullstellen $\delta_1, \dots, \delta_n \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$\#\{k \mid \delta_k > 0\} =$ Anzahl der Vorzeichenwechsel in den Koeff. von $P(x)$

$\#\{k \mid \delta_k < 0\} =$ \cdot $P(-x)$

$\#\{k \mid \delta_k = 0\} = \checkmark$

Erinnerung:

Knoten $K \rightsquigarrow$ Seifert-Fläche $S \xrightarrow{\mathbb{Z}^2} \mathbb{Z}^2$

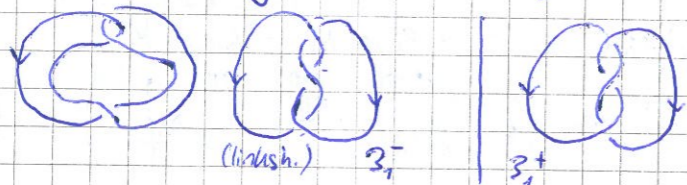
\rightsquigarrow Seifert-Form $\Theta_S: H_1 S \times H_1 S \rightarrow \mathbb{Z}$

\rightsquigarrow Determinante $\det(K) = \det(-i\Theta_S - i\Theta_S^T)$

Signatur $\text{sign}(K) = \text{sign}(\Theta_S + \Theta_S^T)$

Bsp: Twistknoten $\text{sign}(T_k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0 \\ -2 & k \geq 1 \end{cases}$

insb. $T_1 = 3_1$ hat $\text{sign}(3_1^-) = -2$, $\text{sign}(3_1^+) = +2$



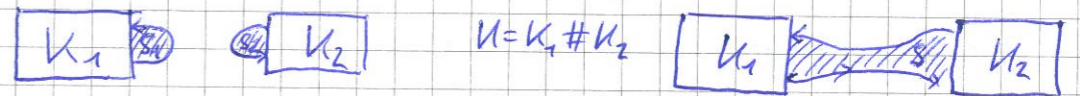
Einfluss von Symmetrien:	Knoten	Or. K	Or. \mathbb{R}^3	Seifert-Fl. - Form	Signatur	
$\Theta_S(a,b) = (k(a^+, b^+))$	K	+	+	S	Θ_S	σ
$\Theta_S(a,b) = (k(a^+, b^+))$	K'	-	+	S'	$\Theta_{S'}$	σ
(oben/unten bzgl. Fläche)	K^*	+	-	S	$-\Theta_S$	$-\sigma$
	K^*	-	-	S'	$-\Theta_{S'}$	$-\sigma$

Bem: Dies ist einer der einfachsten Beweise, dass es chirale Knoten gibt, konkret $3_1^+ \neq 3_1^-$

Weitere Kandidaten:

- Färbungen $P_{4s}^{(1,2,3,4)}(3_1^\pm) = 1 + 5x^{\mp 2}$?
- Jones-Polynom (später)

Verhalten unter verb. Summe:



Seifert-Form: $H_1(S) = H_1(S_1) \oplus H_1(S_2)$

$$g(S) = g(S_1) + g(S_2)$$

$$\Theta_S = \begin{pmatrix} \Theta_{S_1} & 0 \\ 0 & \Theta_{S_2} \end{pmatrix} = \Theta_{S_1} \oplus \Theta_{S_2} \quad \text{Nachvollziehen?}$$

Signatur: $\text{sign}(K_1 \# K_2) = \text{sign}(K_1) + \text{sign}(K_2)$

Bsp: Kreuzknoten $\text{sign}(3_1^+ \# 3_1^-) = +2 - 2 = 0$

Großmutterknoten $\text{sign}(3_1^+ \# 3_1^+) = +2 + 2 = 4$

$\text{sign}(3_1^- \# 3_1^-) = -2 - 2 = -4$

$\det(K) = \det(-i\Theta_S - i\Theta_S^T)$
 Versuche $\det(q^{-1}\Theta_S - q\Theta_S^T)$ $q \mapsto i$

Basiswechsel: Sei M eine Matrix zu Θ_S

$$M' = T^T M T, T \in GL_{2g} \mathbb{Z}$$

$$\det(q^{-1}M' - qM^T) = \det(T^T (q^{-1}M - qM^T) T)$$

$$= \det(T^T) \cdot \det(q^{-1}M - qM^T) \det(T) = \det(q^{-1}M - qM^T)$$

$$\det(T^T) = \det(T) \in \mathbb{Z}^\times = \{\pm 1\}$$

Stabilisierung: $M' = \begin{pmatrix} M & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$

$q^{-1}M' - qM'^t = \begin{pmatrix} q^{-1}M - qM^t & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \dots & * \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$ $\det(q^{-1}M' - qM'^t) = \det(q^{-1}M - qM^t) \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \det(q^{-1}M - qM^t)$

Satz: Das Polynom $\Delta(K) := \det(q^{-1}\Theta_s - q\Theta_s^t) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ ist invariant unter Basiswechsel und Stabilisierung und somit eine Invariante des Knotens K .

"Laurentpolynom" heißt, dass auch negative Exponenten zugelassen sind.

Bem: Diese hochhebt die Determinante $\det(K) = \Delta(K)|_{q \mapsto i}$

Bsp: Twistknoten $\Theta_s = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$
 $q^{-1}\Theta_s - q\Theta_s^t = \begin{pmatrix} -kq^{-1} + kq & 0 + 1q \\ -1q^{-1} - 0q & -1q^{-1} + 1q \end{pmatrix}$
 $\det(\dots) = k(q - q^{-1})(q - q^{-1}) - q(-q^{-1})$
 $= k(q^2 - 2 + q^{-2}) + 1$
 $= kq^2 + (1 - 2k)q^0 + kq^{-2}$

Probe: $q \mapsto i: -k + 1 - 2k - k = 1 - 4k \checkmark$

Beob: Für Knoten tauchen nur gerade Potenzen auf.

Zudem gilt $\Delta(q^{-1}) = \Delta(q)$, denn

$\Delta(K)|_{q \mapsto q^{-1}} = \det(q\Theta_s - q^{-1}\Theta_s^t) = \det(-q^{-1}\Theta_s + q\Theta_s) = (-1)^{2g} \det(q^{-1}\Theta_s - q\Theta_s) = \Delta(K)$

Anschauung:

Prop: $\Delta(K) = \Delta(K') = \Delta(K^*) = \Delta(K^+)$

$\Delta(K_1 \# K_2) = \Delta(K_1) \cdot \Delta(K_2)$

Bsp: $\Delta(3_1^{\pm}) = q^2 - 1 + q^{-2}$

$\Delta(3_1^+ \# 3_1^+) = (q^2 - 1 + q^{-2})^2$

Prop: $\text{span}_q \Delta(K) \leq 4g(K)$

$\text{span}_q [a_m q^m + \dots + a_n q^n] := n - m$
 $m \leq n, a_m \neq 0, a_n \neq 0$

Bew: Sei S eine Seifert-Fläche zu K mit minimalem Geschlecht, $g(S) = g(K)$.

Betrachte Θ_s und $q^{-1}\Theta_s - q\Theta_s^t$:

$\xrightarrow{2g}$
 $\begin{pmatrix} a_{jj}q^j + b_{jj}q^j & \dots \\ \vdots & \ddots \end{pmatrix}$ $\det(\dots) = \sum_{k=-2g}^{2g} c_k q^k$
 $\Rightarrow \text{span} \det(\dots) \leq 4g \quad //$

Anwendung: $g(K) \geq \frac{1}{4} \text{span}_q \Delta(K)$

Falls wir eine Seifert-Fläche S mit $g(S) = \frac{1}{4} \text{span} \Delta(K)$ finden solln, dann ist S minimal.

Bem: Dank obiger Beobachtungen gilt $\text{span}_q \Delta(K) \in 4\mathbb{N}$.

Übung: Die Konstruktion von $\text{sign}(K)$ und $\Delta(K)$ verallgemeinert sich von Knoten zu Verschlingungen $L, \#L \geq 1$ (Details!?)

Wir erhalten $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$

Satz (Alexander 1928, Conway 1969)

Das Alexander-Polynom $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ (\mathcal{L} Menge der Verschlingungsklassen) erfüllt $\Delta(0) = 1$ und folgende Relation: (lokale Relation, genannt Seifertrelation)

$\Delta \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \end{array} \right) - \Delta \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \end{array} \right) = (q - q^{-1}) \Delta \left(\begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right)$

Dies bestimmt Δ eindeutig und definiert sogar einen Algorithmus zur Berechnung.

Bem: $\#L_+ = \#L = \#L_0 + 1$, daher benötigen wir \mathcal{L} , die Menge \mathbb{K} reicht nicht.



$H_1(S_+) \cong H_1(S_0) \oplus \langle a \rangle \cong H_1(S_-)$

$$\Theta_+ = \begin{pmatrix} \theta_0 & v \\ u & w \end{pmatrix} \quad \Theta_- = \begin{pmatrix} \theta_0 & v \\ u & w+1 \end{pmatrix}$$

$$q^{-1}\Theta_- - q\Theta_+ = \begin{pmatrix} q^{-1}\theta_0 - q\theta_0^+ & q^{-1}v - qu^+ \\ q^{-1}u - qv^+ & (w+1)(q^{-1}q) \end{pmatrix}$$

$$\det(L_+) - \det(L_-) = (q^{-1} - q) \det(L_0)$$

Korollar: Für $q \rightarrow i$ erhalten wir

$$\det(\downarrow) - \det(\uparrow) = 2i \det(\downarrow)$$

Bislang: Knoten $K \rightsquigarrow$ Seifert-Fläche S

\rightsquigarrow Form $\theta_S: H_1 S \times H_1 S \rightarrow \mathbb{Z}$

\rightsquigarrow Alexander $\Delta(K) = \det(q^{-1}\theta_S - q\theta_S^+)$

Signatur $\text{sign}(K) = \text{sign}(\theta_S + \theta_S^+)$

Schienenrelation

$$\Delta(\downarrow) - \Delta(\uparrow) = (q - q^{-1}) \Delta(\downarrow)$$

$$\det(\downarrow) - \det(\uparrow) = 2i \det(\downarrow)$$

Bem: Wir können $z := q - q^{-1}$ als Variable verwenden und erhalten

das (Alexander-) Conway-Polynom.

$$\nabla: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[z], \quad \nabla(\emptyset) = 1, \quad \nabla(\downarrow) - \nabla(\uparrow) = z \nabla(\downarrow)$$

Wir können beide identifizieren gemäß $\mathbb{Z}[z] \subset \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ mit $z = q - q^{-1}$.

Korollar: Für Knoten K gilt $\nabla(K) \in 1 + z^2 \mathbb{Z}[z^2]$

Für Versch. L mit $\#L \geq 2$ gilt $\nabla(L) \in z^{\#L-1} \mathbb{Z}[z^2]$

Bew: $\nabla(\emptyset) = 1, \nabla(\emptyset\emptyset) = 0$ warum?

a) Seifert-Fläche: s  $H_1(s) = \langle a \rangle, \theta_S = (0)$

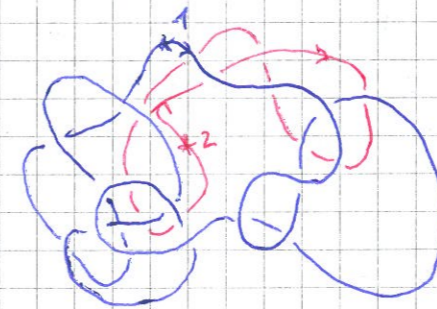
b) Schienenrelation:

$$0 = \nabla(\downarrow\uparrow) - \nabla(\uparrow\downarrow) = \nabla(\emptyset\emptyset)$$

Induktion über i) die Anzahl der Kreuzungen ii) die Anz. der zu wechselnden Kreuzungen bis zum triv. Knoten

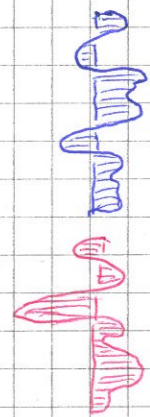
Lemma: Zu jedem Verschlingungsdiagramm D mit Orientierung und Markierung auf jeder Komponente (*) stellt das absteigende Diagramm D^{ab} die triviale Verschlingung dar.

(*) Wir nehmen die Komponenten $D = (D_1, \dots, D_n)$ als nummeriert an.



Beim ersten Besuch wird überkreuzt.

Seitenansicht:



Dies ist eine triv. Verschlingung.

a) R1-Züge trivialisieren (in der Seitenansicht)

b) Kreuzungen einsparen.

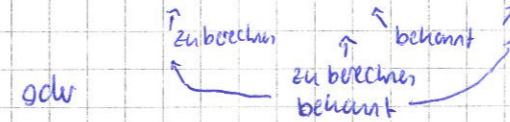
Prop: Dies zeigt, dass die Schienenrelation ∇ eindeutig festlegt.

Genauer liefert dies einen Algorithmus zur Berechnung von ∇ :

Zu jedem Diagramm D wähle Markierungen und wechsle

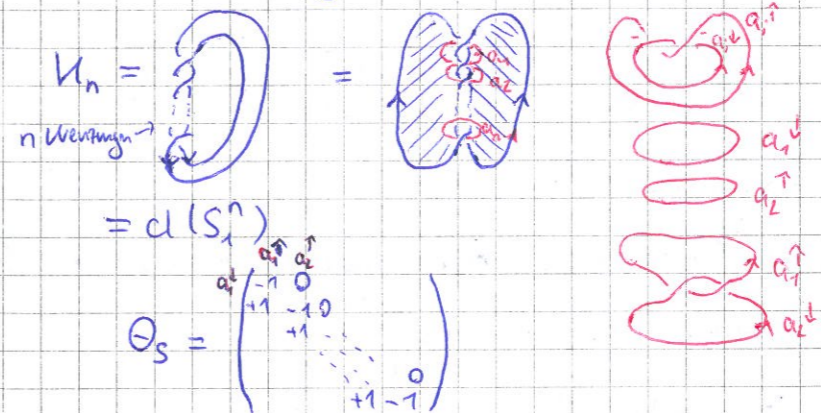
Kreuzungen bis zu D^{ab} . Damit rekursiv

$$\nabla(\downarrow) - \nabla(\uparrow) = z \nabla(\downarrow)$$



Bsp: Torusknoten $K_n = T(2, n)$ für $n \in 1 + 2\mathbb{Z}$

Torusverschlingung $K_n = T(2, n)$ für $n \in 2\mathbb{Z}$.



$K_0 = \emptyset \emptyset$ triv.

$K_1 = \emptyset \emptyset$ triv

$K_2 = \emptyset \emptyset$ Hopf

$K_3 = \emptyset \emptyset$ Kleeblattschl.

$$q^{-1}\theta_S - q\theta_S^+ = \begin{pmatrix} q^{-1}q^{-1} - q & 0 \\ q^{-1}q^{-1} & -q \\ 0 & q^{-1}q^{-1} \end{pmatrix} = A_n \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]^{n \times n}$$

Nach letzte Spalte entwickeln:

$$\det(A_n) = \underbrace{q \cdot q^{-1}}_{=1} \det(A_{n-2}) + \underbrace{(q - q^{-1})}_z \det(A_{n-1})$$

$$\det(A_1) = 1$$

$$\det(A_4) = 2z + z^3$$

$$\det(A_2) = z$$

$$\det(A_5) = 1 + 3z^2 + z^4$$

$$\det(A_3) = z \det(A_2) + \det(A_1) = 1 + z^2$$

$$\det(A_6) = 3z + 4z^3 + z^5$$

$$\det(A_7) = 1 + 6z^2 + 5z^4 + z^6$$

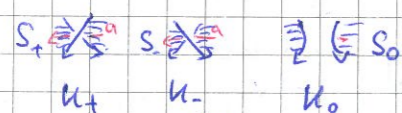
Muster?

Hier wäre die Schirrenrelation schneller gewesen:

$$\nabla(K_n) = \nabla(K_{n-2}) + z \nabla(K_{n-1})$$

$$\nabla(K_0) = 0, \nabla(K_1) = 1, \text{ damit } \nabla(K_2) = z \text{ usw.}$$

Es wäre schön, auch für die Signatur eine Art Schirrenrelation zu haben!



$$Q_+ = \begin{pmatrix} Q_0 & * \\ * & w \end{pmatrix} \quad Q_- = \begin{pmatrix} Q_0 & * \\ * & w+1 \end{pmatrix}$$

$$A_+ = Q_+ + Q_+^T, \quad A_- = Q_- + Q_-^T$$

$$A_+ = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ * & 2w \end{pmatrix} \quad A_- = \begin{pmatrix} A_0 & * \\ * & 2w+2 \end{pmatrix}$$

$$A_{\pm} \sim \begin{pmatrix} h_1 & 0 & e_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n & c_n \\ c_1 & \dots & c_n & c_{\pm} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{\pm} \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{sonst.} \\ \text{durch} \\ \text{Zeilenv.} \\ \text{Spaltenoperationen.} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & h_n & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{\pm}' \end{pmatrix}$$

Schließlich: $\text{sign}(A_+) - \text{sign}(A_-) \in \{0, -1, -2, 3\}$

Bem: Für Knoten K gilt $\det(K) \in 1 + 4\mathbb{Z}$ also $\text{sign}(K_+) - \text{sign}(K_-) \in \{0, -2, 3\}$

Ver: Für die Entknotungszahl n gilt demnach

$$n(L) \geq \frac{1}{2} |\text{sign}(L)|$$

$$\text{Allg: } n(L_1, L_2) \geq \frac{1}{2} |\text{sign}(L_1) - \text{sign}(L_2)|$$

Erinnerung: Ähnliches gilt bei p -Färbungen für $c_p(L) = \dim_{\mathbb{F}_p} \text{Col}_p(L)$,

p prim. Damit $n(L_1, L_2) \geq |c_p(L_1) - c_p(L_2)|$

Können wir die Signatur von Knoten durch die Schirrenrelation berechnen?

Nutze zusätzlich die Determinante

$$\begin{aligned} \det(K) &= \det(-i Q_S - i Q_S^T) = \det(-i (Q_S + Q_S^T)) \\ &\sim (-i)^n \det(Q_S + Q_S^T) \quad n = 2g \\ &= (-i)^n \delta_1 - \delta_n \end{aligned}$$

$$\text{Damit: } \text{sign}(K_+) - \text{sign}(K_-) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \det K_+ \cdot \det K_- > 0 \\ -2 & \text{falls } \det K_+ \cdot \det K_- < 0 \end{cases}$$

Beispiel: Torusknoten / -verschlingungen $K_n = T(z, n)$

a) über Seifert-Matrix \rightarrow Übung?

b) mit Schirrenrelation

n	$\det(K_n)$	$\text{sign}(K_n)$
0	0	
1	1	0
2	2i	
3	-3	-2
4	-4i	
5	5	-4 usw.
n	ni^{n-1}	

Kap E Das Jones-Polynom

§ E1 Die Kaufmann-Klammer und das Jones Polynom

Wir betrachten die Menge D^{un} der unorientierten Verschlingungsdiagramme.



Prop: Sei R ein Komm. Ring mit 1 und $A, B, C \in R$. Dann gibt

es genau eine Abb. $\langle \cdot \rangle: D^m \rightarrow R$, sodass gilt

1) $\langle \bigcirc \rangle = 1$, $\langle D \cup \bigcirc \rangle = \langle D \rangle \cdot C$

Insb. $\langle \underbrace{\bigcirc \dots \bigcirc}_{n\text{-mal}} \rangle = c^{n-1}$ D Diagramme!

2) $\langle X \rangle = A \langle \cdot \rangle + B \langle \cdot \rangle$

Bew: Eindeutigkeit: Seien $\langle \cdot \rangle, [\cdot]: D^m \rightarrow R$ zwei Abb mit (1, 2)

Induktion über die Kreuzungszahl $cr(D)$

$cr(D) = 0 \Rightarrow \langle D \rangle = c^{n-1} = [D]$ durch (1).

$cr(D) \geq 1 \Rightarrow \langle D \rangle = A \langle X \rangle + B \langle Y \rangle = A [D] + B [D] = [D]$

Existenz: Rekursive Konstruktion von $\langle \cdot \rangle: D_{cr \leq n} \rightarrow R$

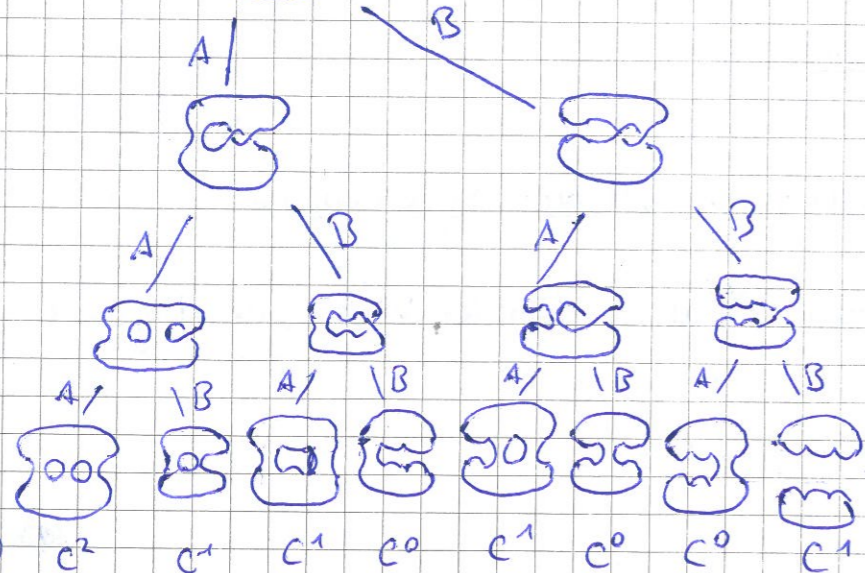
$n=0$ $\langle D \rangle = c^{n-1}$

$n=1$: $\langle D \rangle = A \langle X \rangle + B \langle Y \rangle$

$n \geq 2$: $\langle D \rangle = A \langle X \rangle + B \langle Y \rangle$
 $= AA \langle X \rangle + AB \langle X \rangle + BA \langle X \rangle + BB \langle X \rangle$
 $= A \langle X \rangle + B \langle X \rangle$
 $= \langle D \rangle$

D.h. $\langle \cdot \rangle$ ist unabhängig von der Nummerierung der Kreuzungen.

Bsp:



Rechenmeister-Züge:

R2: $\langle X \rangle = A^2 \langle Y \rangle + AB \langle Z \rangle + BA \langle W \rangle + B^2 \langle V \rangle$
 $= (A^2 + ABC + B^2) \langle Y \rangle + AB \langle Z \rangle$

$\stackrel{!}{=} \langle Z \rangle$ Das ist erfüllt für $AB=1$, also $B=A^{-1}$ und $C = -A^2 - A^{-2}$

R3: $\langle X \rangle = A \langle Y \rangle + A^{-1} \langle Z \rangle$

$\stackrel{R2}{=} A \langle Y \rangle + A^{-1} \langle Z \rangle = \langle X \rangle$

R1: $\langle Q \rangle = A \langle R \rangle + A^{-1} \langle S \rangle$

$= [A + A^{-1}(-A^2 - A^{-2})] \langle R \rangle = (-A^{-3}) \langle R \rangle$

Wie erreichen wir Invarianz unter R1? Brutal: $-A^{-3} = 1$ (Quotientenbildung)

Geschickter: Wir betrachten orientierte Diagramme und den Drall (writhe)

$w: D^0 \rightarrow \mathbb{Z}$, $w(D) = \sum_{\text{Kreuzung}} \epsilon(p)$, $\epsilon = +1$ $\epsilon = -1$

$w(\text{crossing}) = w(\text{link})$, $w(\text{crossing}) = w(\text{link})$, $w(Q) = w(R) - 1$
 $w(S) = w(R) + 1$

Def: Für jedes orientierte Diagramm D definieren wir das Jones-Polynom

$V(D) = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{w(D)}$

Dies ist invariant unter allen R-Zügen.

R1: $V(Q) = \langle Q \rangle \cdot (-A^{-3})^{w-1}$
 $V(R) = \langle R \rangle \cdot (-A^{-3})^w$

Bsp./Übung: $V(\text{link}) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

Satz: Wir erhalten so die Abbildung $V: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$

Isotopieklassen von Verschlingungen

Prop: Für $L \in \mathcal{L}$ gilt $V(L^+) = V(L)$

Wendet man die Orientierung von $L_1 \subset L$ um und lässt $L_2 = L \setminus L_1$ unverändert,

so gilt $V(L_1^+ L_2) = V(L_1 L_2) \cdot A^{b(L_1, L_2)}$

Prop: $V(L^*) = V(L)^*$, wobei $*$: $\mathbb{Z}[A^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$, $A \mapsto A^{-1}$

Bew: Stelle L durch ein Diagramm D dar.

$$w(D^*) = -w(D)$$

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= A \langle \downarrow \rangle \langle \uparrow \rangle + A^{-1} \langle \downarrow \rangle \langle \downarrow \rangle \\ \langle X \rangle &= A^{-1} \langle \uparrow \rangle \langle \uparrow \rangle + A \langle \uparrow \rangle \langle \downarrow \rangle \end{aligned} \quad A \mapsto A^{-1}$$

Damit klar per Induktion.

Alt mit Eindeutigkeit: $[O] = \langle D^* \rangle^*$

erfüllt $[O \dots O] = c^{n-1}$ und $[X] = AD[\uparrow] + A^{-1}[\downarrow]$

also $[J] = \langle \rangle$.

Bsp: $V(\text{Knoten}) = A^4 + A^{12} - A^{16}$

$V(\text{Knoten}) = A^{-4} + A^{12} - A^{16}$

Dies ist nach Färbungspolynom und Signatur unser dritter Beweis für die Chiralität der Kleeblattschlinge.

Prop: $V(\text{Kleeblatt}) = V(\text{Knoten}) \cdot V(\text{Knoten})$

Bew: Stelle U, L durch Diagramme dar, kurz $\square \rightarrow \square$

Induktion über $cr(D)$. Für $cr(D)=0$ ist alles klar.

$$\langle \text{Kleeblatt} \rangle = \langle \text{Knoten} \rangle \cdot c^n = \langle \text{Knoten} \rangle \cdot \langle \text{Knoten} \rangle$$

Für $cr(D) \geq 1$

$$\begin{aligned} \langle \text{Kleeblatt} \rangle &= A \langle \text{Knoten} \rangle \langle \text{Knoten} \rangle + A^{-1} \langle \text{Knoten} \rangle \langle \text{Knoten} \rangle \\ \langle \text{Knoten} \rangle \cdot \langle \text{Knoten} \rangle &= A \langle \text{Knoten} \rangle \cdot \langle \text{Knoten} \rangle + A^{-1} \langle \text{Knoten} \rangle \cdot \langle \text{Knoten} \rangle \end{aligned}$$

Notation: übliche Schreibweisen für das Polynom $V(L)$.

in den Variablen $q = -A^2$ bzw. $t = A^{-4} = q^2$

Satz: Die Invariante $V: \mathcal{D}^{\text{or}} \rightarrow \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] \subset \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$

erfüllt $V(O) = 1$ und die Schierenrelation

$$q^{-1} V(\text{Knoten}) - q^2 V(\text{Knoten}) = (q^{-1} - q^2) V(\text{Knoten})$$

Dies legt V eindeutig fest und liefert zugleich einen Algorithmus.

Beweis: $A \langle X \rangle = A^2 \langle \downarrow \rangle \langle \uparrow \rangle + A^{-1} \langle \downarrow \rangle \langle \downarrow \rangle \quad | \cdot A$

$A^2 \langle X \rangle = A^{-2} \langle \uparrow \rangle \langle \uparrow \rangle + A^0 \langle \uparrow \rangle \langle \downarrow \rangle \quad | \cdot A^{-1}$

$$q^{-2} V(\text{Knoten}) - q^2 V(\text{Knoten}) = A^{+4} (-A^{-3})^{w+1} \langle X \rangle - A^{-4} (-A^{-3})^{w-1} \langle X \rangle$$

$$= (-A^{-3})^w [-A \langle X \rangle + A^{-1} \langle X \rangle]$$

$$= (-A^{-3})^w (A^{-2} A^2) \langle \downarrow \rangle \langle \uparrow \rangle$$

$$= (q^{-1} - q) V(\text{Knoten})$$

Erinnerung: Alexander-Polynom

$$\Delta(O) = 1 \quad 1 \Delta(\text{Knoten}) - 1 \Delta(\text{Knoten}) = (q - q^{-1}) \Delta(\text{Knoten})$$

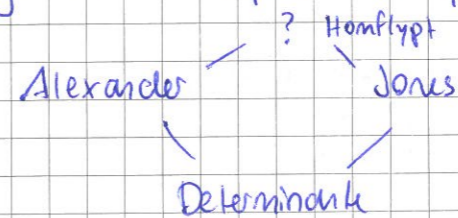
Jones:

$$\Delta(O) = 1 \quad q^{-2} V(\text{Knoten}) - q^2 V(\text{Knoten}) = (q^{-1} - q) V(\text{Knoten})$$

Determinante:

$$\det(O) = 1 \quad \det(\text{Knoten}) - \det(\text{Knoten}) = 2i \det(\text{Knoten})$$

Daraus folgt $\det = \Delta|_{q \rightarrow i} = V|_{q \rightarrow i}$



1.7.15

Jones-Polynom - zwei Zugänge

1) Kauffman-Klammer $\langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$

Drall-Normierung $V(D) = \langle D \rangle \cdot (-A^{-3})^{w(D)}$

2) Schierenrelation

$$q^{-2} V(\text{Knoten}) - q^2 V(\text{Knoten}) = (q^{-1} - q) V(\text{Knoten})$$

vgl. Alexander-P. $\Delta: \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{Z}[q]$

$$1 \cdot \Delta(\text{Knoten}) - 1 \cdot \Delta(\text{Knoten}) = (q - q^{-1}) \Delta(\text{Knoten})$$

übliche Konvention: $q = -A^2$ bzw. $t = A^{-4} = q^2$

73

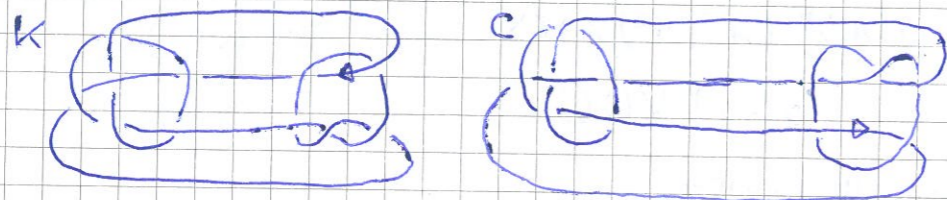
Bem: V unterscheidet viele Knoten, die Δ nicht unterscheidet, Bsp.
 $3_1 \neq 3_1^*$ Umgekehrt gibt es Knoten K, L mit $\Delta(K) \neq \Delta(L)$ aber
 $V(K) = V(L)$.

D.h. beide Invarianten sind unabhängig.

Ein Defekt / Eigenschaft von Δ und V ist Invarianz unter Mutation:



Berühmtes Beispiel: Conway-Knoten vs Kinoshita-Terasaki-Knoten.



Satz: Sei $I: D^{\text{or}} \rightarrow \text{Ring}$ eine Invariante mit $I(\bigcirc) = 1$ und
 $aI(X) + bI(Y) = cI(Z)$ $a, b, c \in \text{Ring}, a, b \in \text{Ring}^*$

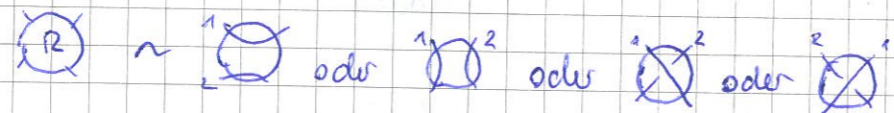
Dann ist I invariant unter Mutation.

Bew: Induktion über $cr(R)$

$cr(R) = 0$: oder ✓

$cr(R) \geq 1$: Mache Strang 1 absteigend, dann 2.

Wenn absteigend, dann links



Induktion über die Anzahl n der zu wechselnden Kreuzungen bis absteigend.

$n=0 \vee, n \geq 1$:

$$aI(X) + bI(Y) = cI(Z)$$

\Leftrightarrow

$$aI(X) + bI(Y) = cI(Z)$$

Bsp: Für Conway-Knoten und U-T-Knoten K gilt
 $\Delta(C) = \Delta(K), V(C) = V(K)$. Wie unterscheidet man also K und C ?

Es geht mit Färbungspolynom:

z.B. mit $G = \text{PSL}_2 \mathbb{F}_7, x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ord}(x) = 3$

$$P_G^x(K) = 1 + 6x, P_G^x(C) = 1 + 12x$$

Ebenso $G = A_7, x = (1234567)$

$$P_G^x(K) = 1 + 7x^2 + 28x^5 + 28x^6$$

$$P_G^x(C) = 1 + 7x^2 + 7x^3 + 21x^5 + 14x^6$$

Mit $G = M_{11} \subset A_{11}$ findet man sogar $K \neq K^*, K^*, K^*$ und $C \neq C^*, C^*, C^*$

Bem: Die Berechnung von Δ ist relativ leicht & effizient (Dank linearer Algebra!).
Wann?

Die Berechnung von V ist aufwändiger.

Nur wenige spezielle Werte lassen sich anders und schneller berechnen.

- Prop:
- $V(L)|_{q \rightarrow 1} = 2^{\#L-1}$ (\bar{u} : Schienenrelation)
 - $V(L)|_{q \rightarrow i} = \det(L)$ (— " —)
 - $V(L)|_{q = e^{\pi i/3}} = \pm (i\sqrt{3})^{\text{Col}_3(L)}$ \leftarrow Anzahl 3-Färbungen

Bem: Für Torusknoten $T(a, b)$ kennt man geschlossene Formeln für Δ und V .
 Im Allgemeinen bleibt's bei mühsamen Rechnungen für Einzelfälle.

§EZ Verallgemeinerung zum HOMFLYPT-Polynom und zum Kauffman-Polynom

Satz HOMFLYPT: P. Freyd, D. Vetter, J. Hoste, WBR-Lickorish, U. Millett, A. Ocjann 1985
 und J. Przytycki, P. Traczyk 1987)

Sei R ein kommutativer Ring mit Eins, $a, b \in R$ invertierbar, $c, d \in R$
 mit $a+b = cd$.

Dann existiert genau eine Abb $I: D^{\text{or}} \rightarrow R$

mit 1) $I(\bigcirc) = 1$ und $I(D \cup \bigcirc) = I(\bigcirc) \cdot d$

2) $aI(X) + bI(Y) = cI(Z)$

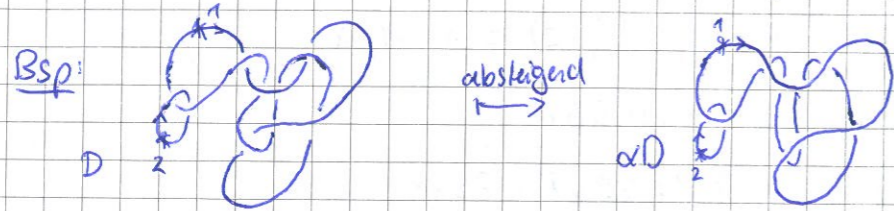
3) I ist invariant unter Reidemeister-Zügen

Beweis: Eindeutigkeit haben wir bereits bewiesen (\Leftrightarrow Algorithmus)

Existenz verläuft nach Konstruktion.

$D_n = \{ \text{Diagramme mit } \leq n \text{ Kreuzungen} \}$

$D_n^* = \{ \text{---}^n \text{--- und nummerierte Komponenten jeweils mit Basispunkt} \}$



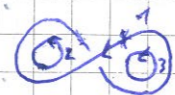
Lemma: αD ist trivial, genauer: es existiert eine Folge von R-Zügen

$\alpha D = D_0 \rightarrow D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_k = O, O$ mit $cr(D_0) \geq cr(D_1) \geq \dots \geq cr(D_k) = 0$

Hierbei erlauben wir neben R1,2,3 auch

$RZ^2: \quad \bigcirc \mid \sim \mid \bigcirc$

Beweis: Übung / Lickorish Kap 15

Bem: Ohne RZ^2 gehts nicht: 

Konstruktion von $I_n: D_n^* \rightarrow \mathbb{R}$

n=0: $I_0: D_0 \rightarrow \mathbb{R}$, setze $I_0(D) = d^{\#D-1}$ gemäß (1).

n ≥ 1: Sei I_{n-1} konstruiert. Definiere I_n wie folgt:

Sei $w(D)$ die Anzahl der zu wechselnden Kreuzungen von D nach αD .

Für $w(D) = 0$ setze $I_n(D) = d^{\#D-1}$ gemäß (1).

Für $w(D) \geq 1$, dann wechsele die erste Kreuzung und berechne $I_n(D)$ gemäß (2).

Wir zeigen:

(A_n) Ergebnis $I_n(D)$ ist unabhängig von der Reihenfolge der Kreuzungen

(B_n) --- n --- von den Basispunkten

(C_n) --- n --- invariant unter R-Zügen in D_n^*

(D_n) --- n --- unabhängig von der Nummerierung.

A_0, B_0, C_0, D_0 sind klar.

Seien $A_{n-1}, B_{n-1}, C_{n-1}, D_{n-1}$ bewiesen.

A_n gilt durch Kommutativität:

$aa I_n(\downarrow \downarrow) - ab I_n(\downarrow \downarrow) = ac I_n(\downarrow \downarrow)$

$ba I_n(\downarrow \downarrow) - bb I_n(\downarrow \downarrow) = bc I_n(\downarrow \downarrow)$

$\Rightarrow a^2 I_n(\downarrow \downarrow) - b^2 I_n(\downarrow \downarrow) = ac I_n(\downarrow \downarrow) + bc I_n(\downarrow \downarrow)$

$aa I(\downarrow \downarrow) - ab I(\downarrow \downarrow) = ac I(\downarrow \downarrow)$

$ba I(\downarrow \downarrow) - bb I_n(\downarrow \downarrow) = bc I_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$\Rightarrow a^2 I_n(\downarrow \downarrow) - b^2 I_n(\downarrow \downarrow) = ac I_{n-1}(\downarrow \downarrow) + bc I(\downarrow \downarrow)$

Differenz: $c^2 I(\downarrow \downarrow) - c^2 I(\downarrow \downarrow) = 0$

Damit gilt A_n , d.h. I_n erfüllt die Schenkelrelation (2) für jede Kreuzung!

Konstruktion

6. Juli 15

A_n - Reihenfolge der Kreuzungen ist beliebig

B_n - Unabhängigkeit von Startpunkten

C_n - R-Züge

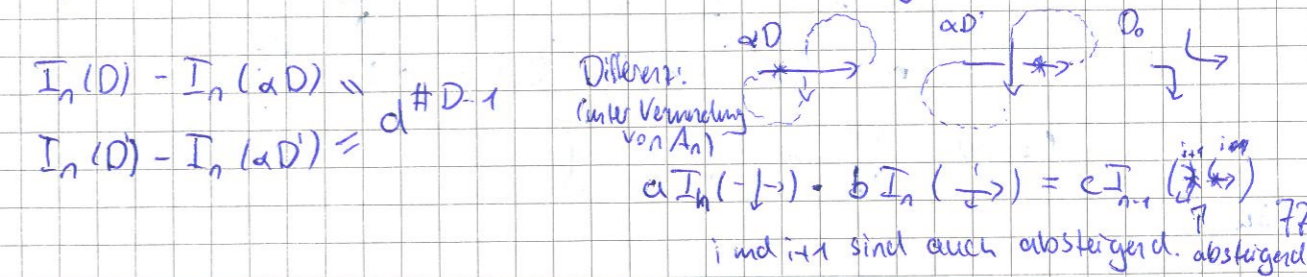
D_n - Umnummerierung

B_n : Verschiebung eines Startpunktes



$i \neq j \Rightarrow \alpha D = \alpha D' \Rightarrow I_n(D) = I_n(D')$

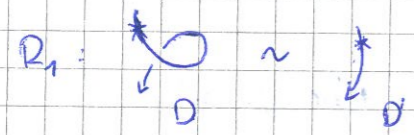
$i=j: \quad \alpha D = \begin{matrix} & j & \\ & \downarrow & \\ * & \rightarrow & \\ & \downarrow & \end{matrix} \quad \alpha D' = \begin{matrix} & i & \\ & \downarrow & \\ * & \rightarrow & \end{matrix} \quad (\text{sonst gleich})$



$cI_{n-1}(\overset{**}{\downarrow})$ absteigend
 $cd^{\#D_0-1} = cd \cdot d^{\#D-1} = (a+b)d^{\#D-1}$

$aI_n(\downarrow) - bI_n(\overset{\downarrow}{\downarrow}) = cd^{\#D_0-1} = (a-b)d^{\#D-1}$
 $\stackrel{d^{\#D-1}}{\leftarrow} \quad \stackrel{d^{\#D-1}}{\leftarrow}$

C_n : Reidemeister-Züge:

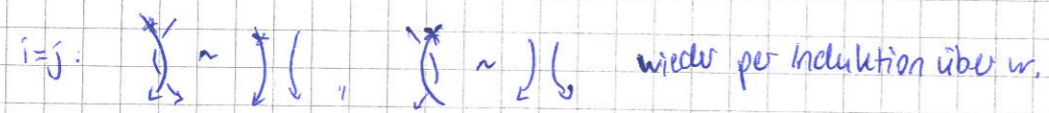
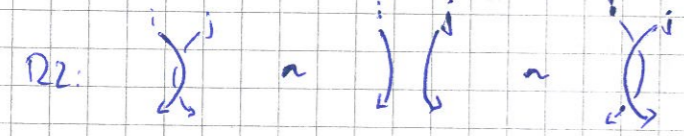


Induktion über Anz. $w(D)$ der zu wechselnden Kreuzungen von D nach αD .
 Nach Verschiebung von $*$ wie obengilt $w(D) = w(D')$. Für $w(D) = w(D') = 0$ ist alles klar.

$I_n(D) = d^{\#D-1} = I_n(D') = d^{\#D'-1}$

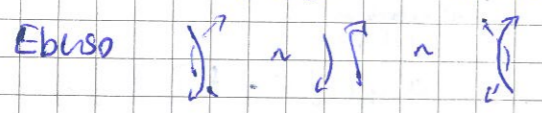
Sei $w(D) \geq 1$. Dann wechsle eine Kreuzung:

$aI_n(\overset{*}{\downarrow} \downarrow) - bI_n(\overset{\downarrow}{\downarrow}) = cI_{n-1}(\overset{*}{\downarrow} \downarrow)$
 $\parallel \quad \leftarrow \parallel \text{ dank Induktion} \quad \parallel \text{ dank } C_{n-1}$
 $aI_n(\overset{*}{\downarrow} \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$ (verschärfte Induktion)



Ausrechnen: $aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$\parallel \quad \leftarrow \quad \parallel$
 $aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$



$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$\parallel \quad \leftarrow \quad \parallel \quad \parallel$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

Diskussion aller Fälle

$i < j$: leicht ($"\Leftarrow"$)

$i < j$: leicht ($"\Rightarrow"$)

$i < j < i$: $I_n(\downarrow \downarrow) - I_n(\downarrow \downarrow) = ?$

$\parallel \quad \leftarrow \quad \parallel$

$I_n(\downarrow \downarrow) - I_n(\downarrow \downarrow) = ?$

Differenz ausrechnen:

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_n(\downarrow \downarrow)$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_n(\downarrow \downarrow)$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

ungeschickt angefangen!

Neuer Versuch:

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$aI_n(\downarrow \downarrow) - bI_n(\downarrow \downarrow) = cI_{n-1}(\downarrow \downarrow)$

$b(1. \text{ Zeile}) + a(2. \text{ Zeile}): a^2 I_n(\downarrow \downarrow) - b^2 I_n(\downarrow \downarrow) = bc I_n(\downarrow \downarrow) + ac I_n(\downarrow \downarrow)$

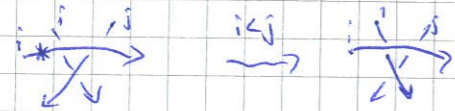
$\stackrel{\parallel}{\leftarrow} \quad \stackrel{\parallel}{\leftarrow} \quad \stackrel{\parallel}{\leftarrow}$
 $a^2 I_n(\downarrow \downarrow) - b^2 I_n(\downarrow \downarrow) = bc I_n(\downarrow \downarrow) + ac I_n(\downarrow \downarrow)$

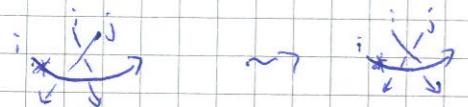
Damit können wir alle Stränge permutieren.

Für eine Permutation ist die R^2 -Invarianz klar, damit auch für alle anderen.

Ebenso 


R^2 : $0| \sim |0$ klar (Ändert keine Wertung)

Bsp zu R^2 :  ok.



$j < i$



 gleich

D_n : Unabhängig von Nummerierung, $D \sim D'$ Umnummerierung

Induktion über $w(D)$

$$w(D) = 0 \Rightarrow D \cong aD \sim \begin{matrix} R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow D' \sim \begin{matrix} R & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

monoton fallende R -Züge in D_n^*

$$(C_n) \Rightarrow I_n(D) = d^{\#D-1} = I_n(D)$$

Für $w(D) \geq 1$ wechsle eine Wertung und schliesse per Induktion.

Satz (HOMFLYPT) Sei R komm. Ring mit Eins, $a, b \in R^*$, $c, d \in R$.

$a-b = cd$ Dann ex. genau eine Abb. $I: D^{or} \rightarrow R$ mit

$$1) I(\bigcirc) = 1, I(D \cup \bigcirc) = I(D) \cdot d$$

$$2) aI(\text{cross}) - bI(\text{cross}) = cI(\text{cross})$$

3) I ist invariant unter R -Zügen.

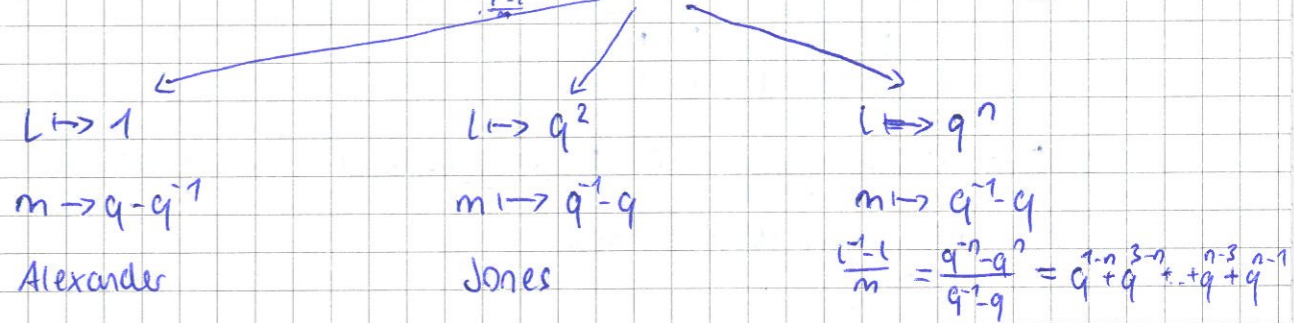
8.7.15

Bsp: Alexander-Polynom: $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$, $a=b=1$, $c=q-q^{-1}$, $d=0$

Alexander-Conway: $R = \mathbb{Z}[z]$, $a=b=1$, $c=z$, $d=0$

Jones-Polynom: $R = \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$, $a=q^{-2}$, $b=q^2$, $c=q^{-1}-q$, $d=q^{-1}+q$

HOMFLYPT: $R = \mathbb{Z}[l^{\pm 1}, m^{\pm 1}]$, $a=l^{-1}$, $b=l$, $c=m$, $d = \frac{l^{-1}-l}{m}$



Übung: $n=1$ ergibt eine triv. Invariante. Warum?

Ebenso beweist man:

Satz (Kauffman 1980) Es existiert genau eine Abb. $\Delta: D^{bn} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm}, z^{\pm}]$ mit

$$1) \Delta(\bigcirc) = 1, \Delta(\sigma) = a \cdot \Delta(-)$$

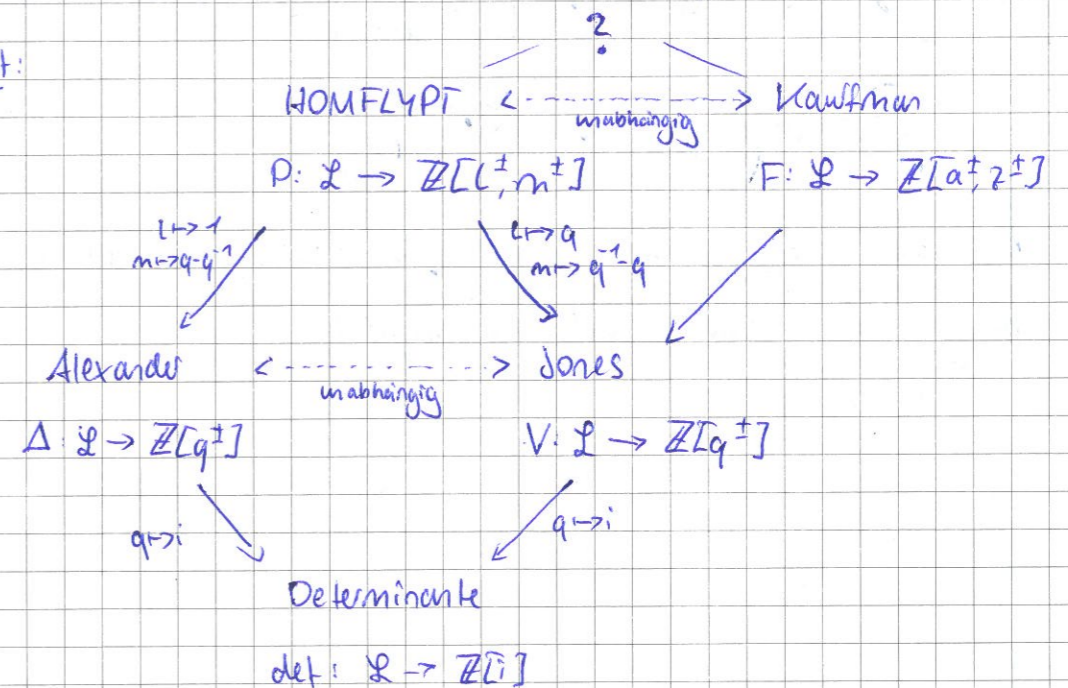
$$2) \Delta(\text{cross}) + \Delta(\text{cross}) = z[\Delta(\text{cross}) + \Delta(\text{cross})]$$

3) Δ ist invariant unter $R^2/3$ Zügen.

Die Abb $F: D^{or} \rightarrow \mathbb{Z}[a^{\pm}, z^{\pm}]$, $F(D) = a^{w(D)} \Delta(D)$ ist invariant unter

$R^2/3$ -Zügen. Dies ist das Kauffman-Polynom.

Übersicht:



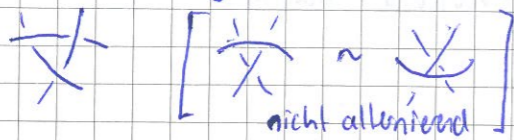
§ E3 Die Tait-Vermutungen

Def: Ein Diagramm $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt alternierend, wenn beim Durchlaufen jeder Komponente abwechselnd über/Unterquerungen auftreten.

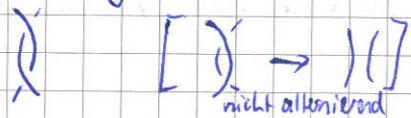


Eine Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^2$ heißt alternierend, wenn sie sich durch ein alt. Diagramm darstellen lässt.

Bem: In einem alt. Diagramm ist kein R3-Zug möglich:



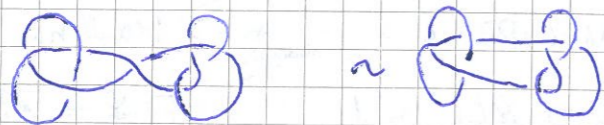
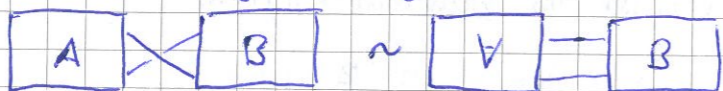
Ebensowenig ist ein reduzierender R2-Zug möglich:



Reduzierende R1-Züge sind möglich:



Allgemeiner ist folgendes möglich:



Ein (alt.) Diagramm heißt reduziert, wenn keine solche Reduktion mehr möglich ist. (Das ist leicht zu erkennen).

Die drei Tait-Vermutungen:

- 1) Jedes red. alt. Verschlingungsdiagramm D minimiert die Kreuzungszahl.
 $D' \sim D \Rightarrow cr(D') \geq cr(D)$.
- 2) Für red. alt. Diagramme ist der Drall $w(D) = \sum_{\text{Kreuzung } p} \epsilon(p)$ eine Invariante.
 D, D' red. alt., $D \sim D' \Rightarrow w(D) = w(D')$.
- 3) Sind D, D' red. alt. Diagramme, $D \sim D'$, dann lassen sie sich allein durch Flypes (in S^2) ineinander überführen.

Flype: $\curvearrowright \boxed{R} \curvearrowleft \sim \boxed{B} \curvearrowright$

Ist R1 ein Flype?
Nein, man macht den Drall kaputt!

Bem: Dies löst das Klassifikationsproblem für alternierende Verschlingungen!

Bem: (3) \Rightarrow (2)

Notation: Jedes Polynom $P \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$, $P \neq 0$, schreibt sich eindeutig

$$P = \sum_{k=m}^n p_k A^k, \quad p_m \neq 0 \neq p_n, \quad m \leq n.$$

- Wir sehen:
- $\min \deg(P) := m$
 - $\max \deg(P) := n$
 - $\text{width}(P) := n - m$

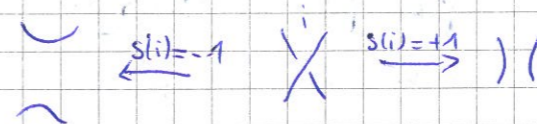
Bsp: 1/Alexander-Polynom $\text{width}_q \Delta(D) \leq 4g(S_D)$

und Gleichheit gilt falls D zshgd. und alternierend.

2) Wir wollen dies für Jones und cr. zeigen.

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein unor. Diagramm mit nummerierten Kreuzungen $i=1, \dots, n$.

Zu $s: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}$ definiere sD durch



Sei $|sD|$ die Anzahl der Kreise und $\sum s := \sum_{i=1}^n s(i)$ die Summe der Vorzeichen.

Lemma: Für die Kaufman-Klammer gilt

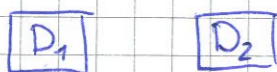
$$\langle D \rangle = \sum_{s: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}} A^{z_s} \underbrace{(-A^2 - A^{-2})^{|\text{sgn}(D)-1|}}_{\parallel}$$

Abkürzung = $\sum_s \langle D | s \rangle$?

Ziel: Für red. alt. Diagramme wollen wir $\text{width} \langle D \rangle$ berechnen, genau höchste/niedrigste Terme verstehen.

Distanz Vereinigung von Diagrammen

13.7.15



In der Ebene = disjunkt, im Raum stößt!

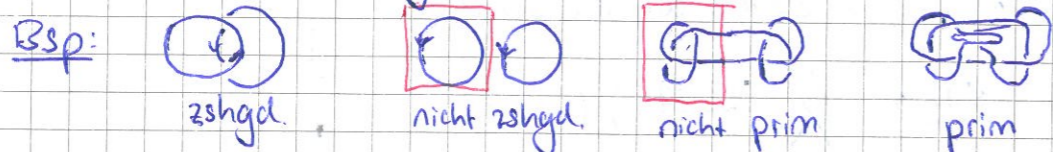
Ein Diagramm D heißt zshgd, wenn es nicht distanz Vereinigung ist, d.h. $D = D_1 \cup D_2$ folgt ^{entweder} $D_1 = \emptyset$ oder $D_2 = \emptyset$.

Ausführlich: Sei $\mathcal{S}^* \cong C \subset \mathbb{R}^2$ eine (polygonale) Jordankurve und $\mathbb{R}^2 \setminus C = A \cup B$ zwei Gebiete. Wenn $C \cap D = \emptyset$, dann ^{entweder} $A \cap D = \emptyset$ oder $B \cap D = \emptyset$.

Verbundene Summe: $D = \boxed{D_1} \# \boxed{D_2}$

D heißt prim, wenn es nicht verbundene Summe ist, d.h. aus $D = D_1 \# D_2$ folgt entweder D_1 oder D_2 trivial (ohne Kreuzungen).

Ausführlich: Besteht $C \cap D$ aus zwei transversalen Schnittpunkten, dann ist entweder $A \cap D$ oder $B \cap D$ trivial, d.h. ein Bogen ohne Kreuzungen.



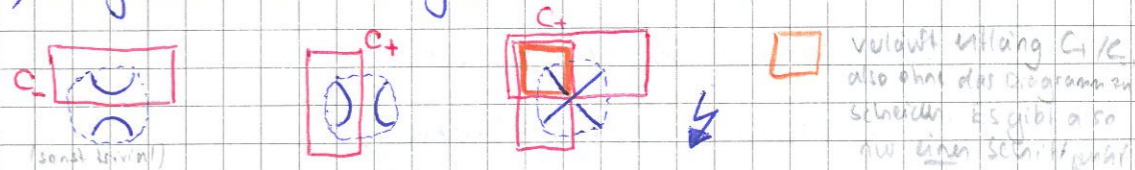
Satz Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein orientiertes Diagramm. Durch Auflösen einer

Kreuzung erhalten wir:

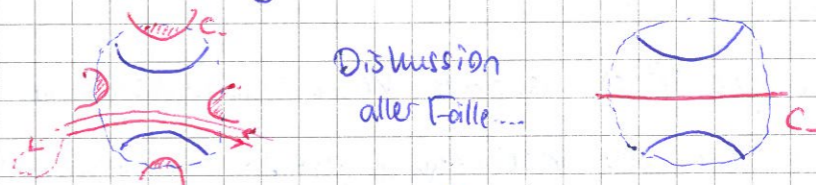


- a) Ist D zshgd, so auch D_+ oder D_- (oder beide)
- b) Ist D prim, so auch D_+ oder D_- (oder beide)

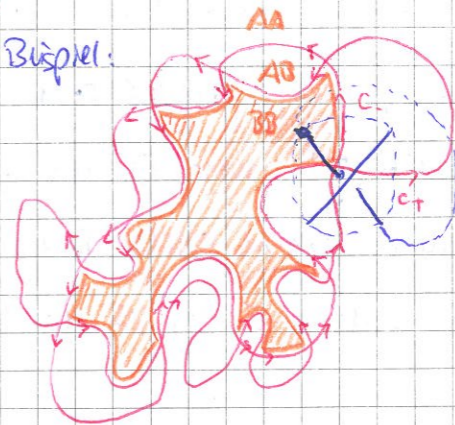
Beweis: a) Angenommen D ist zshgd aber weder D_+ noch D_- .



Sei $\mathcal{S}^* \cong C \subset \mathbb{R}^2$ mit $C \cap D_- = \emptyset$ und $A \cap D_- \neq \emptyset, B \cap D_- \neq \emptyset$. Wenn C_- der Ball \mathbb{S}^1 nicht schneidet, dann auch nicht $D = \mathbb{S}^1$ und zerlegt D nicht-trivial! Also

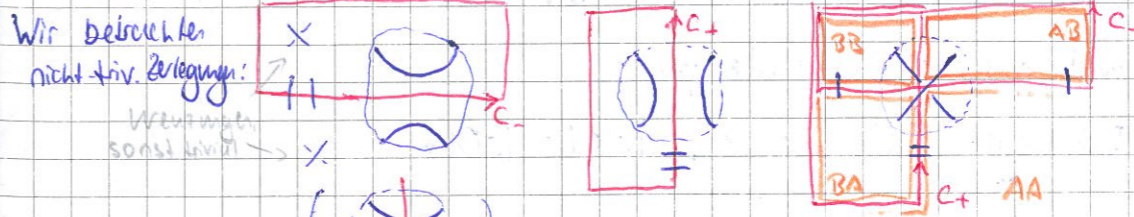


Allg. Fall - Beispiel:



Übung: An komplizierterem Beispiel testen.

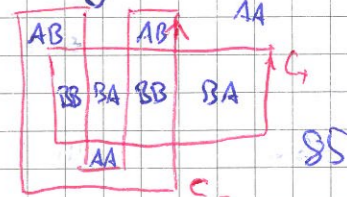
b) Angenommen D ist prim, aber weder D_+ noch D_- prim.



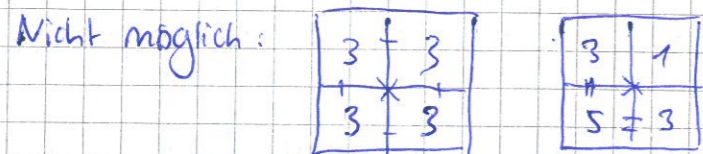
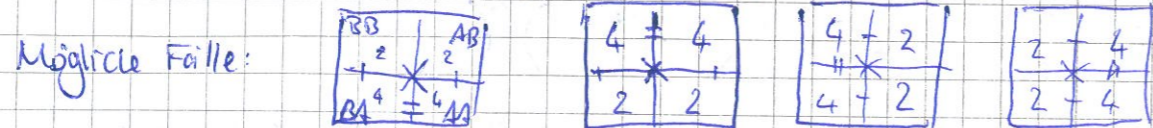
Mache C_-, C_+ transversal, $C_+ \cup C_-$ zerlegt die Ebene in vier offene Mengen:

$$AA = (\mathbb{R}^2 \setminus D) \text{ deg}(C_-, \mathbb{Z}) = 0, \text{ deg}(C_+, \mathbb{Z}) = 0$$

AA	1	0
AB	0	1
BA	0	1
BB	1	1



Aus Paritätsgründen haben genau zwei dieser Bereiche genau zwei Ein-/Ausgänge wie in der Skizze (Diese Bereiche liegen auch aus Paritätsgründen nebeneinander)



Seien AB und BB diese Bereiche

Diese enthalten mind. eine Kreuzung.

Sei AB ein Bereich mit Kreuzung und zwei Ein-/Ausgängen
 \Rightarrow nicht-triviale Zulegung, d.h. D nicht prim //

Die erste Tait-Vermutung wird präzisiert und umfassend beantwortet durch:

Satz: Sei $D \in \mathbb{R}^3$ ein zshgedes Verschlingungsdiagramm und $L \subset \mathbb{R}^3$ die dargestellte Verschlingung, mit Jones-Polynom $V(L) \in \mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$.

- Es gilt $\frac{1}{2} \text{width}_q V(L) \leq cr(D)$
- Gleichheit gilt, wenn D alt & red. ist oder verbundene Summe solcher Diagramme.
- In allen anderen Fällen ist die Ungleichung strikt.

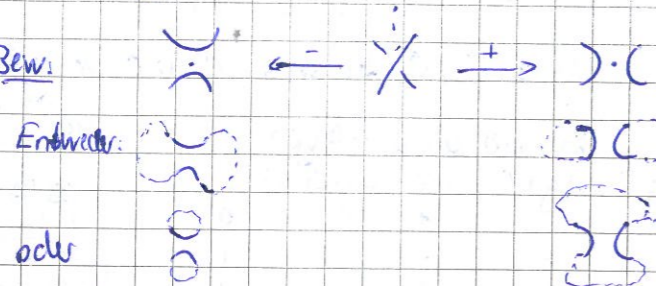
Lemma: (Umschalten von + nach -)

15.7.15

Seien $s, s' : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}$ mit $s(i) = +1, s'(i) = -1$ für ein i und $s(j) = s'(j)$ für alle $j \neq i$.

Dann gilt $\sum s' = \sum s - 2, |s'D| = |sD| \pm 1$ was ist s' ? Was sD ?

Bew:

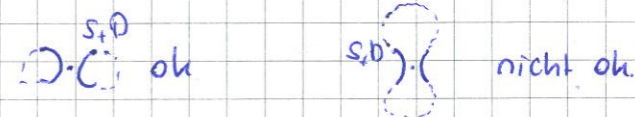


$\{1, \dots, n\}$ ist Nummerierung der Vertices und $\{\pm 1\}$ gibt Auflosungsrichtung an.
 Bei s_+ alle +1, bei s_- -1?

Erinnerung: $s_+, s_- : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{\pm 1\}$ sind konstant +1 bzw. -1.

Def: Ein Verschlingungsdiagramm D heißt ¹⁾ plus-adaquat, wenn $|s_+D| > |sD|$ für alle s mit $\sum s = n-2$,
 2) minus-adaquat, wenn $|s_-D| > |sD|$ für alle s mit $\sum s = 2-n$.
 3) adaquat, wenn es plus- und minus-adaquat ist.

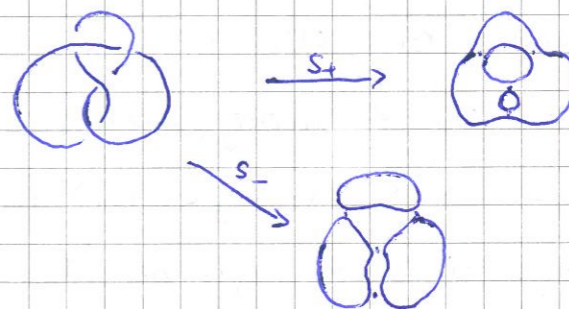
Bem: 1) bedeutet kein der Weis in s_+D stößt an sich selbst.



2) Ebenso für s_-D .

Lemma: Jedes red. alt. Diagramm ist adaquat.

Beispiel:

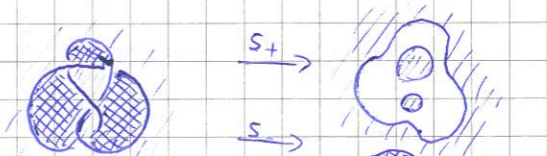


Hier: $|s_+D| = 3, |s_-D| = 3, n = 4$

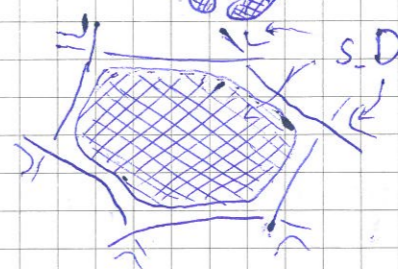
Bew: Färben die Regionen von D schwarz-weiß in Form eines Schachbretts.



Dann berndet s_+D die schwarzen/weißen Regionen



Begründung:



Zudem ist D reduziert, daher stößt nie ein Weis an sich selbst.



Lemma A: Für jedes Verschlagsdiagramm D gilt:

1) a) $\max \deg_A \langle D \rangle \leq cr(D) + 2|s_+ D| - 2$

b) Gleichheit gilt, wenn D plus-adequat ist

2) a) $\min \deg_A \langle D \rangle \geq -cr(D) - 2|s_- D| + 2$

b) Gleichheit gilt, wenn D minus-adequat ist.

Also $\text{width}_A \langle D \rangle \leq 2cr(D) + 2|s_+ D| + 2|s_- D| - 4$

und Gleichheit gilt, wenn D adequat ist.

Beweis: Erinnerung: $\langle D \rangle = \sum_s \langle D|s \rangle$, $\langle D|s \rangle = A^{\sum s} (-A^{+2} - A^{-2})^{|s|D|-1}$

1) a) $\max_{s \rightarrow s'} \deg_A \langle D|s_+ \rangle = cr(D) + 2|s_+ D| - 2$

Beim Umschalten einer Wertung von $s(i) = \pm 1$ nach $s(i) = -1$ gilt

$\sum s' = \sum s - 2$ und $|s' D| = |s D| \pm 1$.

Also $\max \deg_A \langle D|s' \rangle \leq \max \deg_A \langle D|s \rangle$

Daher $\max \deg_A \langle D|s \rangle \leq \max \deg_A \langle D|s_+ \rangle$ für alle s .

b) Wenn D plus-adequat ist, dann gilt bei jedem ersten Umschalten

$s_+ \rightarrow s$ immer $|s D| = |s_+ D| - 1$, also $\max \deg_A \langle D|s \rangle = \max \deg_A \langle D|s_+ \rangle$

Diese strikte Ungleichung gilt somit für alle s . Im höchsten Grad

gibt es somit nur einen Beitrag und keine Auslöschung.


Lemma B: a) Ist D zshggl, dann gilt $|s_+ D| + |s_- D| \leq cr(D) + 2$.

b) Gleichheit gilt, wenn D alternierend ist oder verbundene

Summe von all. Diagrammen.

c) In allen anderen Fällen gilt " $<$ ".

Bew: a) Induktion über $n = cr(D)$

$n=0$:  $|s_+ D| = |s_- D| = 1$, $1+1 \leq 0+2$

$n \geq 1$: 

Da D zusammenhängend ist, ist auch D_+ oder D_- zshggl.

Ang. D_+ ist zshggl (Der Fall D_- ist analog).

Dann: $|s_+ D| = |s_+ D_+|$

$|s_- D| = |s_- D_+| \pm 1$

Also: $|s_+ D| + |s_- D| = |s_+ D_+| + |s_- D_+| \pm 1$

$\leq (n-1) + 2 \pm 1$

$\leq n+2$

b) Wir betrachten die Schachbrettfärbung.

Sei D alternierend. Dann gilt: $|s_+ D| + |s_- D| = r$ Anzahl der Regionen von D .

Anz. d. schwarzen Regionen Anzahl der weißen Regionen

D hat n Wertungen und k Kanten zwischen diesen.



Es gilt $2k = 4n$, d.h. $k = 2n$.

Die Euler-Char. ist $n - k + r = 2$.

(Bsp: $n=4, k=8, r=6$)

Also $r = 2 - n + k = 2 + n$

Die Gleichheit bleibt erhalten bei verbundener Summe.

$D := \boxed{D_1} - \boxed{D_2}$

$s_+ D = \boxed{s_+ D_1} - \boxed{s_+ D_2}$

$s_- D = \boxed{s_- D_1} - \boxed{s_- D_2}$

$|s_+ D| + |s_- D| = \underbrace{|s_+ D_1| + |s_- D_1|}_{= cr(D_1)+2} + \underbrace{|s_+ D_2| + |s_- D_2|}_{= cr(D_2)+2} - 2$
 \uparrow
 $= cr(D) + 2$

$|s_+ D| = |s_+ D_1| + |s_+ D_2| - 1$

$|s_- D| = |s_- D_1| + |s_- D_2| - 1$

c) ^{Wenn} Sei D prim und nicht alternierend, dann gilt " $<$ ".

Induktion über $n = cr(D)$.

$n=0$: alt ✓ aber nicht prim.

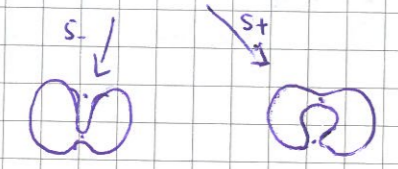
$n=1$: alt. und prim.

$s_+ D = \infty$ $|s_+ D| + |s_- D| = 3$

$s_- D = \bigcirc \bigcirc$ $= cr(D) + 2$

$n=2$: alt, aber nicht prim nicht alt und nicht prim.

prim und nicht alternierend.



$|s_+ D| + |s_- D| = 1 + 1 < cr(D) + 2 = 2 + 2$

$n \geq 3$: Dann gilt ($n \geq 3$)



D_-, D_+ sind nicht alternierend. Mit D ist auch D_- oder D_+ prim.

Sei D_+ prim (D_- analog).

Dann gilt $|s_+ D_+| + |s_- D_+| \leq cr(D_+) + 1$

Also $|s_+ D| + |s_- D| = \underbrace{|s_+ D_+| + |s_- D_+|}_{\leq n} + 1 //$

Satz: Für jedes zshg. Versch'diagramm D gilt
 $width_{A-4} \langle D \rangle \stackrel{\text{A}}{\leq} 2cr(D) + 2|s_+ D| + 2|s_- D| - 4$
 $\stackrel{\text{B}}{\leq} 4cr(D)$.

Gleichheit gilt, wenn D red. alt. ist oder verbundene Summe von red. alt. Diagrammen. In allen anderen Fällen gilt " $<$ ".

Entsprechendes gilt für das Jones-Polynom.

$width_{A-4} V(D) \leq cr(D)$

go?

Erinnerung zur 1. Tait-Vermutung:

Satz: Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein zshg. Verschlingungsdiagramm mit $cr(D)$ Kreuzungen zur Verschlingung $L \subset \mathbb{R}^2$ mit Jones-Polynom $V(L) \in \mathbb{Z}[q^{\pm}]$

Dann gilt:

a) $\frac{1}{2} width_q(V(L)) \leq cr(D)$
 $width_q(V(L))$

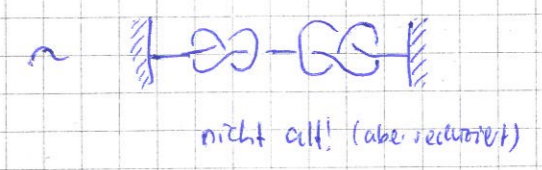
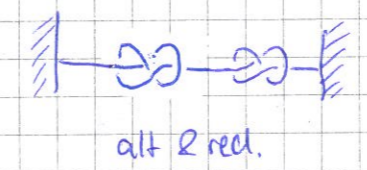
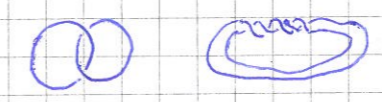
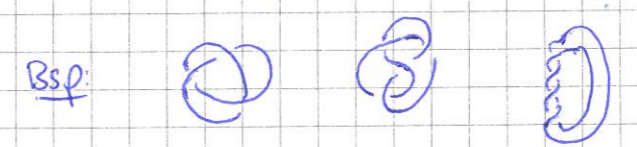
b) Gleichheit gilt, wenn D alt & red. ist oder verbundene Summe von solchen.

c) In allen anderen Fällen gilt " $<$ ".

Kor: Sei $L \subset \mathbb{R}^3$ eine alt. Verschlingung, d.h. sie lässt sich durch ein alt. Diagramm $D \subset \mathbb{R}^2$ darstellen. Wie können dann D als red. annehmen?

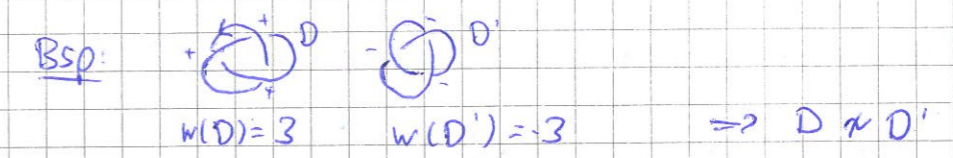
Dann gilt $cr(D) = cr(L) = \min \{ cr(D') \mid D' \text{ stellt } L \text{ dar} \}$

Zudem ist jedes min. Diagramm red. & alt. oder verbundene Summe von solchen.

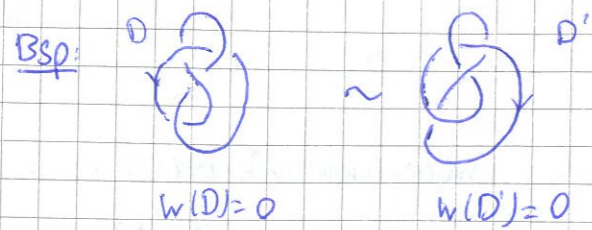


Zw 2. Tait-Vermutung:

Wenn $D \approx D'$ red. & alt. sind, dann haben sie gleichen Drall $w(D) = w(D')$



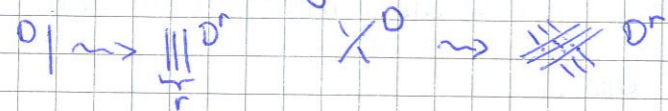
Dies ist unser vierter Beweis der Chiralität von 3_1 !



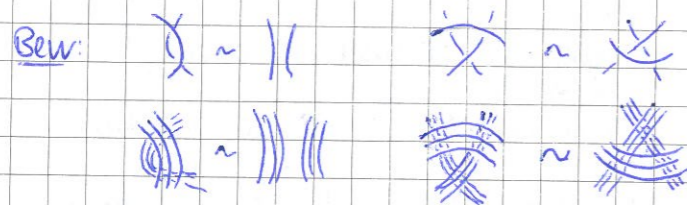
Vorbereitung zum Beweis:

Def: Sei D ein Verschl. diagramm.

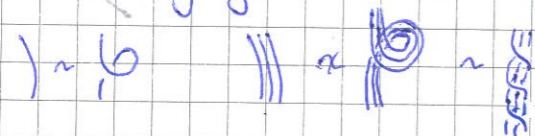
Die r -fache Verzierung D^r von D ist definiert durch



Lemma: Sind D und E R2/3-äquivalent sind, dann auch D^r, E^r



Bem: Für R1-Züge gilt dies nicht:



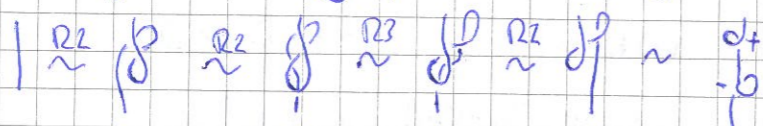
Lemma: Zwei Knotendiagramme D, E sind genau dann R2/3-äquivalent, wenn D, E R-äquivalent sind und zudem $w(D) = w(E)$.

Zwei Verschlingungsdiagramme $D = (D_1, \dots, D_n)$ und $E = (E_1, \dots, E_n)$ sind genau dann R2/3-äquivalent, wenn D, E R-äquivalent sind und $w(D_i) = w(E_i)$ für $i=1, \dots, n$.

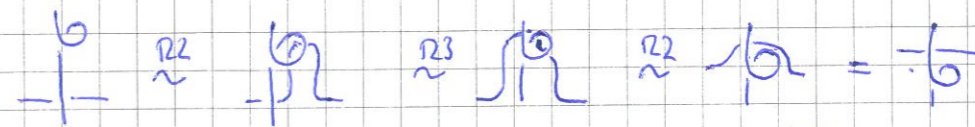
Beweis: " \Rightarrow " ist klar.

" \Leftarrow " Seien D, E R-äquivalent.

Erschre jeeden R1-Zug $| \sim d_i$ durch folgenden Whitney-Trick.



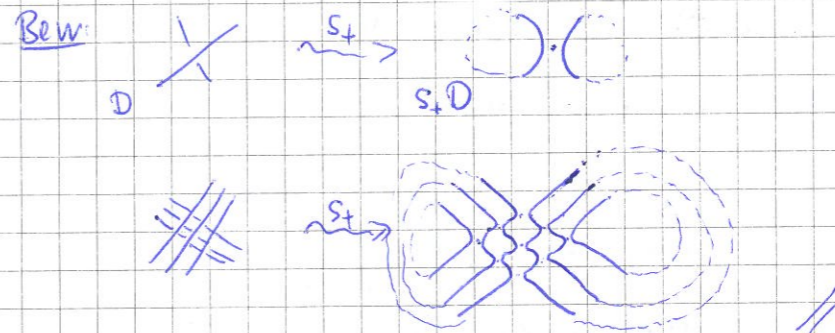
Den überzähligen Kringel \circlearrowleft können wir mittels R2/3-Zügen auf der Komponente beliebig verschieben.



Wir finden so eine Folge von R2/3-Zügen $D \stackrel{R2/3}{\sim} E'$ nach $E' = E + \text{extra Kringel}$ \mathcal{L} und \mathcal{L} .

Es gilt $w(D_i) = w(E_i)$. Da wir $w(D_i) = w(E_i)$ voraussetzen, gilt $w(E'_i) = w(E_i)$, d.h. es gibt auf jeder Komponente E'_i gleichviele + extra Kringel wie - extra Kringel. Diese können wir in Paare gruppieren und mit dem Whitney-Trick löschen. //

Lemma: Ist D plus/minus-adjäquat, so auch D^r .



Bem: Dies zeigt $s_+(D^r) = (s_+ D)^r$ und ebenso $s_-(D^r) = (s_- D)^r$

Bem: D alternierend & reduziert $\Rightarrow D$ adjäquat



Δ D^r ist nie alternierend für $cr(D) > 0, r \geq 2$



Satz: Seien $D \sim D'$ red & alt. ^{Knoten (Beweis schon)} ~~Verschlingungs~~diagramme.

1. Tait-Vermutung: $cr(D) = cr(D')$
2. Tait-Vermutung: $w(D) = w(D')$

Bew: O.E. $w(D') \leq w(D)$ also $w(D') + a = w(D)$, $a \geq 0$.

Ersetze $D' \rightarrow$ durch $E \xrightarrow{+} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\dots}_{a_i}}_{\dots}}_{\dots} \xrightarrow{+}$
mit a Umgeht.

Es gilt $w(D) = n$, $cr(E) = n + a$,

$w(E) = w(D') + a = w(D)$.

Aus $D \stackrel{RZIS}{\sim} E$ und $w(D) = w(E)$ folgt $D \stackrel{RZIS}{\sim} E$.

$\Rightarrow D^r \stackrel{RZIS}{\sim} E^r \Rightarrow \langle D^r \rangle = \langle E^r \rangle$.

D, D' red & alt. $\Rightarrow D, D'$ adäquat

$\Rightarrow E$ plus-adäquat, denn $s_+ E \xrightarrow{+} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\dots}_{a_i}}_{\dots}}_{\dots} \xrightarrow{+}$

$\Rightarrow D^r, E^r$ plus-adäquat für alle r .

Dabei gilt:

$$\begin{aligned} \max \deg_A \langle D^r \rangle &= cr(D^r) + 2|s_+ D^r| - 2 \\ &= n \cdot r^2 + 2r|s_+ D| - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \deg_A \langle E^r \rangle &= cr(E^r) + 2|s_+ E^r| - 2 \\ &= (n+a)r^2 + 2r|s_+ E| - 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow n = n+a$, $|s_+ D| = |s_+ E|$, d.h. $a=0$. //

Nachtrag zur 2. Tait-Vermutung

Satz: Seien $D \sim D'$ zwei red. alt. Knotendiagramme

- 1) $cr(D) = cr(D')$
- 2) $w(D) = w(D')$

22.7.15

Allgemeiner: Seien $D = (D_1, \dots, D_n) \sim D' = (D'_1, \dots, D'_n)$ zwei Verschlingungsdiagramme, red & alt.

- 1) $cr(D) = cr(D')$
- 2) $w(D) = w(D')$

Bew: Für $i=1, \dots, n$ Sorge für gleichen Drall:

$w(D_i) = w(D'_i)$, dann tue nichts $E_i = D_i$, $E'_i = D'_i$

$w(D_i) > w(D'_i)$, dann ergänze $D_i \rightarrow$ zu $E_i \xrightarrow{+} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\dots}_{a_i}}_{\dots}}_{\dots} \xrightarrow{+}$
und behalte $E_i = D_i$, $a_i = 0$

$w(D_i) < w(D'_i)$, dann ergänze $D_i \rightarrow$ zu $E_i \xrightarrow{+} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\dots}_{a_i}}_{\dots}}_{\dots} \xrightarrow{+}$
und behalte $E'_i = D'_i$, $a_i = 0$.

Ergebnis: $E = (E_1, \dots, E_n)$ und $E' = (E'_1, \dots, E'_n)$ mit $w(E_i) = w(E'_i)$
für $i=1, \dots, n$.

$$cr(E) = cr(D) + a_1 + \dots + a_n$$

$$cr(E') = cr(D') + a'_1 + \dots + a'_n$$

Aus $D \stackrel{RZIS}{\sim} E$ und $D' \stackrel{RZIS}{\sim} E'$ und $w(E_i) = w(E'_i)$ für alle i folgt $E \stackrel{RZIS}{\sim} E'$

D, D' alt red $\Rightarrow D, D'$ adäquat

$\Rightarrow E, E'$ plus-adäquat $\xrightarrow{s_+} \underbrace{\underbrace{\underbrace{\dots}_{a_i}}_{\dots}}_{\dots} \xrightarrow{+}$

Für alle $r \in \mathbb{N}$ gilt $E^{(r)}, E'^{(r)}$ plus-adäquat

$$\begin{aligned} \Rightarrow \max \deg_A \langle E^{(r)} \rangle &= cr(E^{(r)}) + 2|s_+ E^{(r)}| - 2 \\ &= r^2 cr(E) + 2r|s_+ E| - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max \deg_A \langle E'^{(r)} \rangle &= cr(E'^{(r)}) + 2|s_+ E'^{(r)}| - 2 \\ &= r^2 cr(E') + 2r|s_+ E'| - 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow cr(E) = cr(E')$, mit (1) $cr(D) = cr(D')$, also $a_1 + \dots + a_n = a'_1 + \dots + a'_n$

Für $n=1$ ist's einfach:

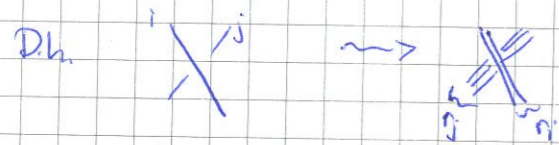
Entweder $0 = a_i$ oder $a_i = 0$

Für $n \geq 2$ reicht's noch nicht:

$$a_1 + a_2 = a'_1 + a'_2$$

z.B. $0 + 3 = 3 + 0$

Idee: Kantele E_1, \dots, E_n mit $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$



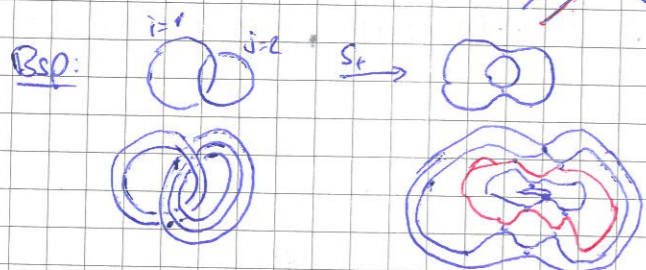
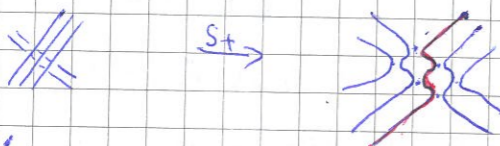
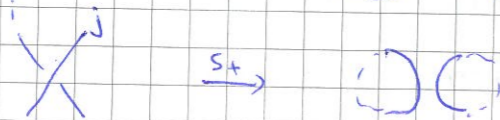
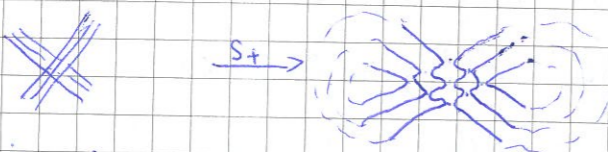
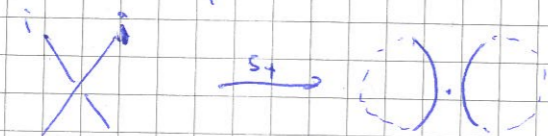
Damit gilt alles wie bisher

Setze $r = (r_1, \dots, r_n)$ und E^r wie oben definiert.

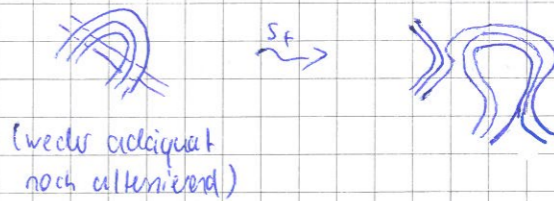
1. Bm $E \stackrel{RZS}{\sim} E' \Rightarrow E^r \stackrel{RZS}{\sim} E'^r$



auch $|st E^r|$ (\pm) adäquat?



Ungünstige Situation:

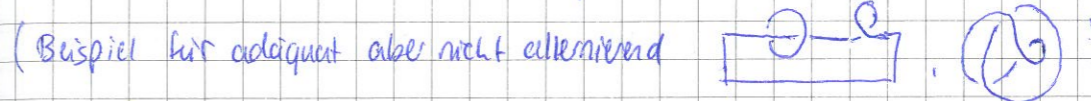


Betrachte Kreuzungen: Komp. i und j kreuzen sich.

$$a_{ij} = \min(r_i, r_j) \quad \text{"weiße Weise"}$$

$$b_{ij} = \max - \min \quad \text{"rote Weise"} \geq 0$$

Kann ein Kreis an sich selbst stoßen?

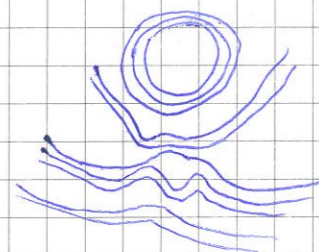
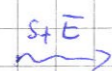


Wie können wir von E und $st E$ auf E^r und $st(E^r)$ schließen?



$$1 \sim 11$$

$$2 \sim 111$$



Antwort auf später verschoben.
Wir nehmen es einfach an!

Angenommen E^r und E'^r sind plus-adäquat für alle $r \in \mathbb{N}$

$$\max \text{deg}_A \langle E^r \rangle = \alpha(E^r) + 2|st E^r| - 2$$

$$= \sum_{i=1}^n r_i^2 \alpha(E_i) + \sum_{i,j} r_i r_j |E_i \cap E_j| + \text{L.o.t.} \quad (\text{lower order terms})$$

$$= \sum_{i=1}^n r_i^2 (\alpha(D_i) + a_i) + \sum_{i,j} r_i r_j |E_i \cap E_j| + \text{L.o.t.}$$

$$\max \text{deg}_A \langle E'^r \rangle = \sum_{i=1}^n r_i^2 (\alpha(D'_i) + a'_i) + \sum_{i,j} r_i r_j |D'_i \cap D'_j| + \text{L.o.t.}$$

Koeffizientenvergleich: $\alpha(D_i) + a_i = \alpha(D'_i) + a'_i$ und $|D_i \cap D_j| = |D'_i \cap D'_j|$
 $a_i = 0$ oder $a'_i = 0$

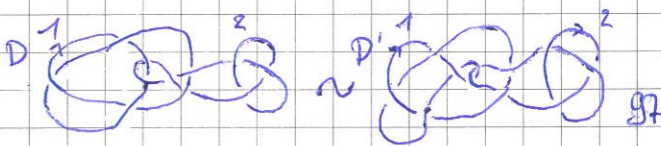
Sind folgende Zahlen realisierbar?

$$(D_1, D_2) \sim (D'_1, D'_2)$$

$$\alpha(D_1) = 3 \quad \alpha(D_2) = 4 \quad \alpha(D'_1) = 4 \quad \alpha(D'_2) = 3$$

$$w(D_1) = 3 \quad w(D_2) = -4 \quad w(D'_1) = 4 \quad w(D'_2) = -3$$

$$|D_1 \cap D_2| = 2 \quad |D'_1 \cap D'_2| = 2$$



Δ D und D' unterscheiden sich durch einen Flip $\begin{matrix} \text{---} \textcircled{R} \text{---} \\ \text{---} \textcircled{B} \text{---} \end{matrix} \sim \begin{matrix} \text{---} \textcircled{B} \text{---} \\ \text{---} \textcircled{R} \text{---} \end{matrix}$

2 Fälle: 1) $\begin{matrix} \vdots \\ \text{---} \textcircled{R} \text{---} \\ \vdots \end{matrix} \sim \begin{matrix} \text{---} \textcircled{B} \text{---} \\ \vdots \end{matrix}$
 \Rightarrow Drall bleibt erhalten

2) $\begin{matrix} \vdots \\ \text{---} \textcircled{R} \text{---} \\ \vdots \end{matrix} \sim \begin{matrix} \text{---} \textcircled{B} \text{---} \\ \vdots \end{matrix}$

Drall wird zwischen i und j übertragen!

Korrektur des Satzes: Der Drall bleibt nicht komponentenweise erhalten,
sondern nur in der Gesamtsumme.

Beweis wie zuvor mit uniformer Kabelung mit $r \in \mathbb{N}$ (steht \mathbb{N}^n).