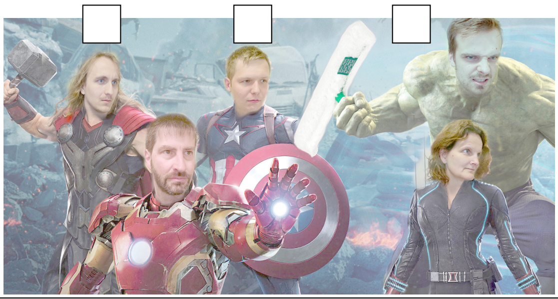
Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Name des Tutors (oder Bild ankreuzen):
Vorname:	
Matrikelnummer:	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/18	/10	/12	/7	/11	/10	/13	/82

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (*18 Punkte*)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr).
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Es existiert eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. ☐ Ja ☐ Nein

2B. Es existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$. ☐ Ja ☐ Nein

2C. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^n$ sind äquivalent. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Jeder zusammenhängende Raum ist wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Jede kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2K. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2L. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

Im Folgenden sei $f : X \to Y$ stetig.

2M. Ist $B \subset Y$ kompakt, dann auch $f^{-1}(B) \subset X$. ☐ Ja ☐ Nein

2N. Ist $A \subset X$ kompakt, dann auch $f(A) \subset Y$. ☐ Ja ☐ Nein

2O. Ist $B \subset Y$ wegzusammenhängend, dann auch $f^{-1}(B) \subset X$. ☐ Ja ☐ Nein

2P. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, dann auch $f(A) \subset Y$. ☐ Ja ☐ Nein

2Q. Ist X hausdorffsch und Y kompakt, so ist f abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2R. Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit (2+3+3+2 = 10 Punkte)*

3A. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{SL}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1 \}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3B. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{O}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid AA^\top = 1_{n\times n} \}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3C. Sei $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Raum aller beschränkten Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $|x| = \sup\{ |x_k| \mid k \in \mathbb{N} \}$. Ist hierin der Einheitsball $\overline{B}(0,1) = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3D. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie.
Ist hierin der Teilraum $[-1,1]^{\mathbb{N}}$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

Aufgabe 4. *Homöomorphismen (2+2+2+2+4 = 12 Punkte)*

4A. Nennen Sie eine stetige Surjektion $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{S}^2$, die genau die folgenden Punkte identifiziert: $(-1,t) \sim (1,t)$ und $(s,1) \sim (s',1)$ und $(s,-1) \sim (s',-1)$ für alle $s, s', t \in [-1,1]$.

4B. Ist die induzierte Abbildung $\bar{f} : [-1,1]^2/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

4C. Nennen Sie eine stetige Abbildung $g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, die genau die folgenden Punkte identifiziert: $(-1,t) \approx (1,t)$ und $(s,-1) \approx (s,1)$ für alle $s, t \in [-1,1]$.

4D. Zeichnen Sie eine Triangulierung des Quadrats $[-1,1]^2$, die eine Triangulierung des Quotienten $[-1,1]^2/_\approx$ mit weniger als 10 Ecken induziert.

4E. Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $]0,1[$ ist homöomorph zu ...
☐ $\mathbb{S}^1$, ☐ $\mathbb{D}^1$, ☐ $\mathbb{S}^2$, ☐ $\mathbb{D}^2$, ☐ $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, ☐ keinem dieser Räume.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $[0,1[\cup[2,3[$ ist homöomorph zu ...
☐ $\mathbb{S}^1$, ☐ $\mathbb{D}^1$, ☐ $\mathbb{S}^2$, ☐ $\mathbb{D}^2$, ☐ $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, ☐ keinem dieser Räume.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $]0,1[\cup]2,3[$ ist homöomorph zu ...
☐ $\mathbb{S}^1$, ☐ $\mathbb{D}^1$, ☐ $\mathbb{S}^2$, ☐ $\mathbb{D}^2$, ☐ $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, ☐ keinem dieser Räume.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung der Halbebene $\mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}$ ist homöomorph zu ...
☐ $\mathbb{S}^1$, ☐ $\mathbb{D}^1$, ☐ $\mathbb{S}^2$, ☐ $\mathbb{D}^2$, ☐ $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, ☐ keinem dieser Räume.

Aufgabe 5. *Wegzusammenhang und* π_0 *(2+3+2 = 7 Punkte)*

5A. In $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ gibt es offensichtlich Wege von der Einheitsmatrix $I=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ zu $S_1(\lambda)=\left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und zu $S_2(\lambda)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, sowie von I zu $R_{12}(\mu)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\\mu&1\end{smallmatrix}\right)$ und zu $R_{21}(\mu)=\left(\begin{smallmatrix}1&\mu\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ für alle $\mu\in\mathbb{R}$. Gibt es einen Weg $\gamma:[0,1]\to\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ von $I=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ nach $T_{12}=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$?

☐ Ja ☐ Nein. Weg oder Hindernis:

5B. Lassen sich $E_\pm=\mathrm{diag}(\pm1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}_n\mathbb{R}$ durch einen Weg verbinden?

☐ Ja ☐ Nein. Weg oder Hindernis:

5C. Nennen und begründen Sie die Zerlegung $\pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{R})$.

Aufgabe 6. *Homotopie (1+4+3+3 = 11 Punkte)*

6A. Definieren Sie: Für stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ ist eine *Homotopie* $H : f \simeq g \dots$

6B. Zeigen Sie: Homotopie $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation, denn es gilt

$F : f \simeq f$ vermöge ...

$F : f \simeq g \implies G : g \simeq f$ vermöge ...

$F : f \simeq g$ & $G : g \simeq h \implies H : f \simeq h$ vermöge ...

Warum ist H stetig?

6C. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $\|-\| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $S = \{\, x \in V \mid \|x\| = 1 \,\}$.
Ist die zugehörige Inklusion $f : S \hookrightarrow V \smallsetminus \{0\} : x \mapsto x$ ein starker Homotopie-Retrakt?
Nennen Sie ein topologisches Hindernis oder eine Retraktion g mit Homotopie $H : \mathrm{id} \simeq f \circ g$.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6D. Gibt es in $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ eine kompakte Untergruppe K, sodass die Inklusion $K \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt ist? Nennen Sie ein Hindernis oder K mit Beweis-Idee.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

Aufgabe 7. *Simplizialkomplexe (2+2+4+2 = 10 Punkte)*

7A. Seien K und L Simplizialkomplexe. Was besagt der Satz zur simplizialen Approximation einer stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$?

7B. In $\mathbb{C}$ betrachten wir den Simplizialkomplex $S^1 = \langle\, \{1, \mathrm{i}\}, \{\mathrm{i}, -1\}, \{-1, -\mathrm{i}\}, \{-\mathrm{i}, 1\} \,\rangle$ sowie den Weg $\gamma : [0,1] \to |S^1| : t \mapsto \mathrm{e}^{10\pi \mathrm{i} t}/|\mathrm{e}^{10\pi \mathrm{i} t}|_1$, projiziert dank Taxinorm. Nennen Sie eine minimale Unterteilung $K \preccurlyeq \langle\, [0,1] \,\rangle$ mit einer simplizialen Approximation $\varphi : |K| \to |S^1|$ zu γ.

7C. Sei K ein Simplizialkomplex der Dimension ≤ 2. Wie viele Elemente enthält die Menge $[|K|, \mathbb{S}^3]$ aller stetigen Abbildungen $|K| \to \mathbb{S}^3$ modulo Homotopie? Begründen Sie Ihre Antwort.

7D. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, X]$ für $X = \mathbb{D}^4 \smallsetminus \{0\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 8. *Kategorien* (*2+2+2+3+2+2 = 13 Punkte*)

8A. Wir betrachten allein das Objekt $X = \mathbb{R}^2$ und als Morphismen kontraktive Abbildungen $f : X \to X$ mit $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$ und die übliche Komposition. Ist dies eine Kategorie?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

8B. Wir betrachten allein das Objekt $X = \mathbb{R}^2$ und als Morphismen Lipschitz–Abbildungen $f : X \to X$ mit $|f(x) - f(y)| \le 2|x - y|$ und die übliche Komposition. Ist dies eine Kategorie?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

8C. Gibt es in der Kategorie `Haus` der Hausdorff–Räume und ihrer stetigen Abbildungen einen Morphismus $f : X \to Y$, der nicht surjektiv ist aber dennoch rechtskürzbar?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

8D. Gibt es zwischen je zwei terminalen Objekten S, T in einer beliebigen Kategorie `C` immer genau einen Isomorphismus $(f, g) : S \cong T$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

8E. Definieren Sie: Ein *Produkt* von Objekten $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in einer Kategorie $\mathtt{C}$ ist...

8F. Wir betrachten $(\mathbb{R}, \le)$ als Kategorie mit Objekten $x, y, \ldots \in \mathbb{R}$. Für $x \le y$ gibt es genau einen Morphismus $f : x \to y$, sonst keinen. Die Komposition entspricht der Transitivität.

Was ist das Produkt der Objekte $x_1 = 42$ und $x_2 = 2017$ in der Kategorie $(\mathbb{R}, \le)$?