Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

<table>
<tr><td>Name: Musterlösung</td><td rowspan="3">Name des Tutors (oder Bild ankreuzen):
</td></tr>
<tr><td>Vorname: Musterlösung</td></tr>
<tr><td>Matrikelnummer: Musterlösung</td></tr>
</table>

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/18	/10	/12	/7	/11	/10	/13	/82

Vorwort zur Musterlösung: Diese Klausur dient als Zwischenbilanz zur Wiederholung der Grundlagen: Definitionen und Sätze, Beispiele und Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung. Die Fragen sind sehr zahlreich aber leicht: Sie wurden in Vorlesung und/oder Übung diskutiert, nur wenige erfordern Anwendung der Techniken auf ein variiertes Beispiel. Gefragt ist, ein passendes Werkzeug zu nennen oder zu nutzen oder ein einfaches Beispiel einzuordnen. Diesen unspektakulären aber nützlichen Fragentyp können Sie zur Diagnose nutzen, auch ähnliche Fragen selbst entwickeln, um Begriffe und Techniken einzuüben. Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (18 Punkte)*

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr).
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

	Ja	Nein
2A. Es existiert eine Bijektion $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.	X	
2B. Es existiert ein Homöomorphismus $\mathbb{R} \cong \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$.		X
2C. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.	X	
2D. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^n$ sind äquivalent.		X
2E. Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.	X	
2F. Jeder zusammenhängende Raum ist wegzusammenhängend.		X
2G. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$.	X	
2H. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$.		X
2I. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.	X	
2J. Jede kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen.	X	
2K. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen.	X	
2L. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.	X	

Im Folgenden sei $f : X \to Y$ stetig.

	Ja	Nein
2M. Ist $B \subset Y$ kompakt, dann auch $f^{-1}(B) \subset X$.		X
2N. Ist $A \subset X$ kompakt, dann auch $f(A) \subset Y$.	X	
2O. Ist $B \subset Y$ wegzusammenhängend, dann auch $f^{-1}(B) \subset X$.		X
2P. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, dann auch $f(A) \subset Y$.	X	
2Q. Ist X hausdorffsch und Y kompakt, so ist f abgeschlossen.		X
2R. Ist X kompakt und Y hausdorffsch, so ist f abgeschlossen.	X	

Aufgabe 3. *Kompaktheit (2+3+3+2 = 10 Punkte)*

3A. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{SL}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det A = 1 \}$ in $\mathbb{R}^{n \times n}$ kompakt?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

▶ Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\mathrm{diag}(a, a^{-1}, 1, \dots, 1) \in \mathrm{SL}_n \mathbb{R}$, also ist $\mathrm{SL}_n \mathbb{R}$ nicht beschränkt, und nach Heine–Borel (2J) nicht kompakt. (Im Fall $n = 1$ ist $\mathrm{SL}_1 \mathbb{R} = \{1\}$ eine Ausnahme.)

Erläuterung: Die Menge $\mathrm{SL}_n \mathbb{R}$ ist abgeschlossen, als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1\}$ unter der stetigen Abbildung $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$. Aber für Kompaktheit genügt das nicht! Nach Heine–Borel (2I&2J) gilt für die euklidischen Räume $\mathbb{R}^n$ endlicher Dimension $n \in \mathbb{N}$: Eine Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie in $\mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt ist.

3B. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{O}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid AA^\top = 1_{n \times n} \}$ in $\mathbb{R}^{n \times n}$ kompakt?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

▶ Die Teilmenge $\mathrm{O}_n \mathbb{R}$ ist abgeschlossen: Sie ist das Urbild der abgeschlossenen Menge $\{1_{n \times n}\}$ unter der stetigen Abbildung $\mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}^{n \times n} : A \mapsto AA^\top$. ▶ Zudem ist $\mathrm{O}_n \mathbb{R}$ beschränkt: Für $A \in \mathrm{O}_n \mathbb{R}$ gilt $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = n$. Dank Heine–Borel (2I) ist $\mathrm{O}_n \mathbb{R}$ kompakt.

Erläuterung: Wir nutzen die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^{n \times n}$, damit gelingt's besonders leicht. Jede andere Norm ist hierzu äquivalent (2C) und induziert somit dieselbe Topologie.
Im Fall $n = 1$ ist $\mathrm{O}_1 \mathbb{R} = \{\pm 1\}$ endlich und somit trivialerweise kompakt.

3C. Sei $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der Raum aller beschränkten Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Supremumsnorm $|x| = \sup\{ |x_k| \mid k \in \mathbb{N} \}$. Ist hierin der Einheitsball $\overline{B}(0, 1) = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ kompakt?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

▶ Wir betrachten die Folge $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\overline{B}(0, 1)$ mit $e_k(k) = 1$ und $e_k(\ell) = 0$ für $\ell \neq k$.
▶ Es gilt $|e_k - e_\ell| = 1$ für $k \neq \ell$. Keine Teilfolge konvergiert, da sie nicht Cauchy–Folge ist. Demnach ist der Teilraum $\overline{B}(0, 1) = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ nicht kompakt. *Alternative:* Wir können direkt eine offene Überdeckung ohne endliche Teilüberdeckung angeben: Die Bälle $U_k = B(e_k, 1)$ sind offen, ebenso $V = \ell^\infty \smallsetminus \{ e_k \mid k \in \mathbb{N} \}$. Es gilt $\overline{B}(0, 1) \subset V \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}} U_k$, aber keine endliche Teilfamilie überdeckt $\overline{B}(0, 1)$. *Warnung:* Heine–Borel (wie in 3B) oder Tychonoff (wie in 3D) greifen hier nicht! Bitte lernen Sie sorgsam Definitionen und Sätze, insb. zur Kompaktheit.

3D. Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum aller Folgen $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit der Produkttopologie.
Ist hierin der Teilraum $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ kompakt?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Das Intervall $[-1, 1]$ in $\mathbb{R}$ ist kompakt dank Heine–Borel (2I) oder direkt aus der Supremums-Eigenschaft. ▶ Nach dem Satz von Tychonoff ist auch das Produkt $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ kompakt.

Erläuterung: Betrachten Sie diese vier Aufgaben im Kontrast. In 3C und 3D ist die Menge $[-1, 1]^{\mathbb{N}}$ ist jeweils dieselbe, aber die beiden Topologien (Produkt vs ℓ^∞–Norm) sind sehr unterschiedlich. Bitte lernen Sie sorgsam Definitionen und Sätze, insb. zur Kompaktheit.

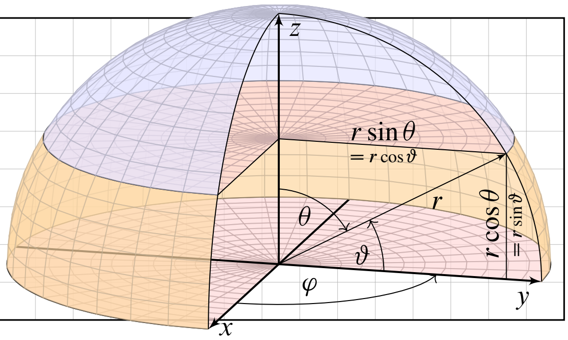
Aufgabe 4. *Homöomorphismen (2+2+2+2+4 = 12 Punkte)*

4A. Nennen Sie eine stetige Surjektion $f : [-1,1]^2 \to \mathbb{S}^2$, die genau die folgenden Punkte identifiziert: $(-1,t) \sim (1,t)$ und $(s,1) \sim (s',1)$ und $(s,-1) \sim (s',-1)$ für alle $s,s',t \in [-1,1]$.

▶▶ Kugelkoordinaten leisten das Gewünschte:

$$f(s,t) = \begin{pmatrix} r\cos(\pi s)\cos(\pi t/2) \\ r\sin(\pi s)\cos(\pi t/2) \\ r \qquad\quad \sin(\pi t/2) \end{pmatrix}$$

für $r > 0$ mit $\varphi = \pi s$, $\vartheta = \pi t/2$



4B. Ist die induzierte Abbildung $\bar f : [-1,1]^2/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ ein Homöomorphismus?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

▶▶ Dank Kompakt–Hausdorff–Kriterium (2R) ist $\bar f$ ein Homöomorphismus.

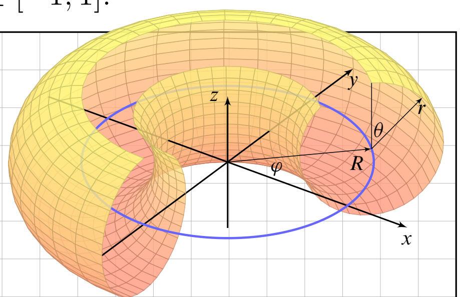
Erläuterung: Nach Konstruktion ist $\bar f : [-1,1]^2/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ stetig und bijektiv. (Nachrechnen!) Der Raum $[-1,1]^2$ ist kompakt (2I), also auch der Quotientenraum $[-1,1]^2/_\sim$ (2N). Der Raum $\mathbb{R}^3$ ist hausdorffsch, also auch der Teilraum $\mathbb{S}^2$. Die stetige Bijektion $\bar f : [-1,1]^2/_\sim \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ ist abgeschlossen (2R), also ein Homöomorphismus.

4C. Nennen Sie eine stetige Abbildung $g : [-1,1]^2 \to \mathbb{R}^3$, die genau die folgenden Punkte identifiziert: $(-1,t) \approx (1,t)$ und $(s,-1) \approx (s,1)$ für alle $s,t \in [-1,1]$.

▶▶ Toruskoordinaten leisten das Gewünschte:

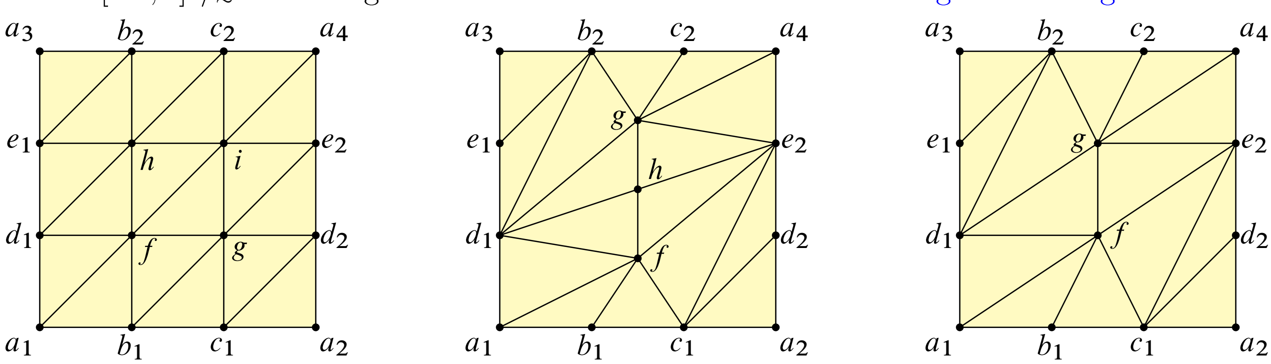
$$g(s,t) = \begin{pmatrix} [R + r\sin(\pi t)]\cos(\pi s) \\ [R + r\sin(\pi t)]\sin(\pi s) \\ r\cos(\pi t) \end{pmatrix}$$

für $0 < r < R$ mit $\theta = \pi t$, $\varphi = \pi s$



Erläuterung: Eine geeignete Abbildung nach $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ wäre noch leichter auszuschreiben.

4D. Zeichnen Sie eine Triangulierung des Quadrats $[-1,1]^2$, die eine Triangulierung des Quotienten $[-1,1]^2/_\approx$ mit weniger als 10 Ecken induziert. Siehe Vorlesung und Übung:



4E. Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $]0,1[$ ist homöomorph zu …

[X] $\mathbb{S}^1$, [ ] $\mathbb{D}^1$, [ ] $\mathbb{S}^2$, [ ] $\mathbb{D}^2$, [ ] $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, [ ] keinem dieser Räume.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $[0,1[\,\cup\,[2,3[$ ist homöomorph zu …

[ ] $\mathbb{S}^1$, [X] $\mathbb{D}^1$, [ ] $\mathbb{S}^2$, [ ] $\mathbb{D}^2$, [ ] $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, [ ] keinem dieser Räume.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von $]0,1[\,\cup\,]2,3[$ ist homöomorph zu …

[ ] $\mathbb{S}^1$, [ ] $\mathbb{D}^1$, [ ] $\mathbb{S}^2$, [ ] $\mathbb{D}^2$, [X] $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, [ ] keinem dieser Räume.

Die Ein-Punkt-Kompaktifizierung der Halbebene $\mathbb{R}_{\ge 0}\times\mathbb{R}$ ist homöomorph zu …

[ ] $\mathbb{S}^1$, [ ] $\mathbb{D}^1$, [ ] $\mathbb{S}^2$, [X] $\mathbb{D}^2$, [ ] $(\mathbb{S}^1+1)\cup(\mathbb{S}^1-1)$, [ ] keinem dieser Räume.

Aufgabe 5. *Wegzusammenhang und π_0 (2+3+2 = 7 Punkte)*

5A. In $\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ gibt es offensichtlich Wege von der Einheitsmatrix $I = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ zu $S_1(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix}\lambda&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und zu $S_2(\lambda) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&\lambda\end{smallmatrix}\right)$ für alle $\lambda\in\mathbb{R}_{>0}$, sowie von I zu $R_{12}(\mu) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\\mu&1\end{smallmatrix}\right)$ und zu $R_{21}(\mu) = \left(\begin{smallmatrix}1&\mu\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ für alle $\mu\in\mathbb{R}$. Gibt es einen Weg $\gamma:[0,1]\to\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ von $I = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ nach $T_{12} = \left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$?

[X] Ja [ ] Nein. Weg oder Hindernis:

▶ Es genügt $\gamma(t) = \begin{pmatrix}\cos(t\pi/2) & -\sin(t\pi/2)\\ \sin(t\pi/2) & \cos(t\pi/2)\end{pmatrix}$ dank $\gamma(0)=I$, $\gamma(1)=T_{12}$ und $\det\gamma(t)=1$.

Erläuterung: Selbstverständlich sind viele andere Wege möglich; dieser ist besonders schön. Es geht auch der direkte Weg $\gamma: t\mapsto (1-t)I + tT_{12}$, denn $\det\left(\begin{smallmatrix}1-t&-t\\t&1-t\end{smallmatrix}\right) = (1-t)^2+t^2>0$. Besonders trickreich ist $T_{12} = R_{12}(1)R_{21}(-1)R_{12}(1)$, denn $\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\1&1\end{smallmatrix}\right)$.

5B. Lassen sich $E_\pm = \mathrm{diag}(\pm1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ durch einen Weg verbinden?

[ ] Ja [X] Nein. Weg oder Hindernis:

▶ Die Determinante $\det:\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ ist eine Polynomfunktion und insbesondere stetig. Es gilt $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \{\,A\in\mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A\ne 0\,\}$. ▶ Dank Zwischenwertsatz lassen sich die Matrizen $E_\pm = \mathrm{diag}(\pm1,1,\dots,1)$ in $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ nicht durch einen Weg $\gamma:[0,1]\to\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ von E_- nach E_+ verbinden, andernfalls wäre $\det\circ\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ ein Weg von -1 nach $+1$ in $\mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$. *Alternative Sichtweise:* Die Determinante liefert die offene Zerlegung $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}\sqcup\mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}$ mit $E_\pm\in\mathrm{GL}_n^\pm\,\mathbb{R} := \{\,A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A\gtrless 0\,\}$. Diese untersuchen wir in der nächsten Aufgabe.

5C. Nennen und begründen Sie die Zerlegung $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R})$.

▶ Es gilt $\pi_0(\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}) = \{\,\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}\,\}$ mit $\mathrm{GL}_n^\pm\,\mathbb{R} = \{\,A\in\mathbb{R}^{n\times n}\mid A\gtrless 0\,\}$. ▶ Zu jeder gegebenen Matrix $A\in\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ liefert der Gauß–Algorithmus mit den obigen Operationen $S_i(\lambda)$, $R_{ij}(\mu)$, T_{ij} einen Weg von A nach $E_\pm = \mathrm{diag}(\pm1,1,\dots,1)$, der ganz in $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ verläuft.

Erläuterung: Die Zerlegung von $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R}$ in die beiden Wegkomponenten $\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$ und $\mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}$ entspricht positiver („rechtshändiger“) und negativer („linkshändiger“) Orientierung. Das spielt in Mathematik und Physik eine fundamentale Rolle, insbesondere auch in Geometrie und Topologie. Sie haben dies in der Vorlesung mehrfach gesehen und in der Übung ausgeführt.

Aufgabe 6. *Homotopie (1+4+3+3 = 11 Punkte)*

6A. Definieren Sie: Für stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ ist eine *Homotopie* $H : f \simeq g \dots$

▶ ... eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

Erläuterung: Letzteres bedeutet $H(0,x) = f(x)$ und $H(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$.
Wir nennen dann H eine Homotopie von f nach g, und nennen f und g homotop.

6B. Zeigen Sie: Homotopie $\simeq$ ist eine Äquivalenzrelation, denn es gilt

$F : f \simeq f$ vermöge ... $F(t,x) = f(x)$, der konstanten Homotopie,

$F : f \simeq g \implies G : g \simeq f$ vermöge ... $G(t,x) = F(1-t,x)$, der umgekehrte Homotopie,

$F : f \simeq g$ & $G : g \simeq h \implies H : f \simeq h$ vermöge ... der verknüpften Homotopie:

$H(t,x) = F(2t,x)$ für $0 \le t \le 1/2$ und $H(t,x) = G(2t-1,x)$ für $1/2 \le t \le 1$.

Warum ist H stetig? Dank Verklebesatz! Genauer: $[0, 1/2] \times X$ und $[1/2, 1] \times X$ sind abgeschlossen, hierauf sind $(t,x) \mapsto F(2t,x)$ und $(t,x) \mapsto G(2t-1,x)$ stetig und gleich auf $\{1/2\} \times X$.

6C. Sei V ein $\mathbb{R}$–Vektorraum mit Norm $\|-\| : V \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ und $S = \{ x \in V \mid \|x\| = 1 \}$.
Ist die zugehörige Inklusion $f : S \hookrightarrow V \smallsetminus \{0\} : x \mapsto x$ ein starker Homotopie-Retrakt?
Nennen Sie ein topologisches Hindernis oder eine Retraktion g mit Homotopie $H : \mathrm{id} \simeq f \circ g$.

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

▶ Retraktion $g : V \smallsetminus \{0\} \to S : x \mapsto x/\|x\|$.
▶ Homotopie $H : \mathrm{id} \simeq f \circ g$ vermöge $H : (t,x) \mapsto (1-t)x + tx/\|x\|$.

Erläuterung: Dank $x \neq 0$ ist g wohldefiniert, zudem stetig als Komposition stetiger Abbildungen. Auch H ist wohldefiniert, zudem stetig. Schließlich gilt $H_0 = \mathrm{id}$ und $H_1 = f \circ g$.
Eine alternative Homotopie ist $K : \mathrm{id} \simeq f \circ g$ mit $K : (t,x) \mapsto x/[(1-t) + t\|x\|]$.

6D. Gibt es in $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ eine kompakte Untergruppe K, sodass die Inklusion $K \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt ist? Nennen Sie ein Hindernis oder K mit Beweis-Idee.

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

▶ Die orthogonale Gruppe $K = \mathrm{O}_n \mathbb{R}$ erfüllt die Forderung: ▶ Sie ist kompakt (3B) und das Gram–Schmidt–Verfahren liefert eine starke Retraktionsdeformation. Siehe Übung!

Erläuterung: In der Übung haben Sie die Zerlegung $h : \mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n \mathbb{R} : (Q, R) \mapsto QR$ als Homöomorphismus nachgewiesen und hierzu das Inverse explizit ausformuliert, ebenso die Zusammenziehung $\mathrm{B}_n^+ \simeq \{1\}$. Alles ist konkret und explizit und gut und schön.

Aufgabe 7. *Simplizialkomplexe (2+2+4+2 = 10 Punkte)*

7A. Seien K und L Simplizialkomplexe. Was besagt der Satz zur simplizialen Approximation einer stetigen Abbildung $f : |K| \to |L|$?

▶ Es existiert eine Unterteilung $K' \preccurlyeq K$, bezüglich derer f sternartig ist. ▶ Somit existiert eine simpliziale Abbildung $\varphi : K' \to L$ deren Realisierung $|\varphi| : |K'| \to |L|$ zu f homotop ist vermöge der affinen Homotopie $H(t, x) = (1 - t)|\varphi|(x) + tf(x)$. Siehe Vorlesung!

Erläuterung: Stetige Abbildungen können unvorstellbar kompliziert sein, simpliziale Abbildungen hingegen sind kombinatorisch gegeben und sehr übersichtlich. Das ist viel einfacher und oft nützlich, wie die folgenden Aufgaben illustrieren.

7B. In $\mathbb{C}$ betrachten wir den Simplizialkomplex $S^1 = \langle\, \{1, \mathrm{i}\}, \{\mathrm{i}, -1\}, \{-1, -\mathrm{i}\}, \{-\mathrm{i}, 1\} \,\rangle$ sowie den Weg $\gamma : [0, 1] \to |S^1| : t \mapsto \mathrm{e}^{10\pi i t}/|\mathrm{e}^{10\pi i t}|_1$, projiziert dank Taxinorm. Nennen Sie eine minimale Unterteilung $K \preccurlyeq \langle\, [0, 1] \,\rangle$ mit einer simplizialen Approximation $\varphi : |K| \to |S^1|$ zu γ.

▶▶ Wir finden $K = \langle\, \{\frac{k}{20}, \frac{k-1}{20}\} \mid k = 1, \dots, 20 \,\rangle$ mit der Abbildung $\varphi : K \to S^1 : \frac{k}{20} \mapsto \mathrm{i}^k$.

Erläuterung: Eine Skizze hilft. Anschaulich läuft γ fünfmal um die Kreislinie, und φ tut dasselbe. Tatsächlich ist γ bezüglich K sternartig und φ eine simpliziale Approximation.

7C. Sei K ein Simplizialkomplex der Dimension ≤ 2. Wie viele Elemente enthält die Menge $[|K|, \mathbb{S}^3]$ aller stetigen Abbildungen $|K| \to \mathbb{S}^3$ modulo Homotopie? Begründen Sie Ihre Antwort.

▶ Es gilt $[|K|, \mathbb{S}^3] = \{*\}$, d.h., jede stetige Abbildung $f : |K| \to \mathbb{S}^3$ ist zusammenziehbar.

▶ Wir triangulieren $\mathbb{S}^3$ durch $h : \partial\Delta^4 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^3$ und betrachten $g = h^{-1} \circ f : |K| \to \partial\Delta^4$.
▶ Wir approximieren g simplizial durch $\varphi : K' \to \langle\, \partial\Delta^4 \,\rangle$ sodass $g \simeq |\varphi| : |K'| \to \partial\Delta^4$.
▶ Die Abbildung φ ist nicht surjektiv, da $\dim K \le 2$ aber $\dim \partial\Delta^4 = 3$.
Wir erhalten also $f = h \circ g \simeq h \circ |\varphi| : |K| \to \mathbb{S}^3 \smallsetminus \{y\} \cong \mathbb{R}^3 \simeq *$.

Erläuterung: Aussage und Beweis gelten allgemein: Ist K ein Simplizialkomplex der Dimension $< n$, so ist jede stetige Abbildung $f : |K| \to \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar. Siehe Übung!

7D. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, X]$ für $X = \mathbb{D}^4 \smallsetminus \{0\}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

▶ Wir nutzen die Homotopie-Äquivalenz $(f, g) : X \simeq \mathbb{S}^3$.
▶ Dies induziert die Bijektion $[\mathbb{S}^2, X] \xrightarrow{\sim} [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] = \{*\}$.

Erläuterung: Mit der Triangulierung $\partial\Delta^3 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ können Sie 7C anwenden. Allgemein: Aus der Vorlesung wissen Sie $[\mathbb{S}^m, \mathbb{S}^n] = \{*\}$ für alle $m < n$. Homotopie kann kompliziertes durch einfaches ersetzen, so auch hier. Dazu wurde die Homotopie erfunden, das ist ihre Stärke.

Aufgabe 8. *Kategorien (2+2+2+3+2+2 = 13 Punkte)*

8A. Wir betrachten allein das Objekt $X = \mathbb{R}^2$ und als Morphismen kontraktive Abbildungen $f : X \to X$ mit $|f(x) - f(y)| \le \frac{1}{2}|x - y|$ und die übliche Komposition. Ist dies eine Kategorie?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

▶ Die Identität id_X ist nicht kontraktiv.

Erläuterung: Es genügt hier, die Definition einer Kategorie $(\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ anzuwenden und die wenigen Forderungen zu prüfen. Nicht alles, was aussieht wie eine Kategorie, ist auch eine!

8B. Wir betrachten allein das Objekt $X = \mathbb{R}^2$ und als Morphismen Lipschitz–Abbildungen $f : X \to X$ mit $|f(x) - f(y)| \le 2|x - y|$ und die übliche Komposition. Ist dies eine Kategorie?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

▶ Die Abbildung $f : x \mapsto 2x$ erfüllt die Bedingung $|f(x) - f(y)| \le 2|x - y|$,
aber die Komposition $g = f \circ f : x \mapsto 4x$ erfüllt dies nicht.

Erläuterung: Es genügt hier, die Definition einer Kategorie $(\mathrm{Ob}, \mathrm{Mor}, \circ)$ anzuwenden und die wenigen Forderungen zu prüfen. Nicht alles, was aussieht wie eine Kategorie, ist auch eine!

8C. Gibt es in der Kategorie `Haus` der Hausdorff–Räume und ihrer stetigen Abbildungen einen Morphismus $f : X \to Y$, der nicht surjektiv ist aber dennoch rechtskürzbar?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

▶ Die Inklusion $f : \mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$ ist stetig, nicht surjektiv aber dennoch rechtskürzbar in `Haus`: Sind $g, h : \mathbb{R} \to Z$ stetig, Z hausdorffsch, so folgt aus $g \circ f = h \circ f$, d.h. $g|_{\mathbb{Q}} = h|_{\mathbb{Q}}$, stets $g = h$.

Erläuterung: Dieses einfache Beispiel tritt in verschiedenen Situationen immer wieder auf. Ebenso genügen $[0, 1[\hookrightarrow [0, 1]$ oder $\mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n$ oder allgemein der Abschluss $X \hookrightarrow Y = \overline{X} \ne X$. Ein umfangreiches Repertoire an Gegen-/Beispielen ist wichtig, gerade in der Topologie.

8D. Gibt es zwischen je zwei terminalen Objekten S, T in einer beliebigen Kategorie `C` immer genau einen Isomorphismus $(f, g) : S \cong T$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

▶ Es gibt genau einen Morphismus $f : S \to T$, weil T terminal ist, und genau einen Morphismus $g : T \to S$, weil S terminal ist. ▶ Ebenso folgt $g \circ f = \mathrm{id}_S : S \to S$, weil S terminal ist, und $f \circ g = \mathrm{id}_T : T \to T$, weil T terminal ist.

Erläuterung: Dieser „general abstract nonsense“ ist einfach doch überaus nützlich, denn er gilt immer, wenn wir ein Objekt durch eine „universelle Abbildungseigenschaft“ definieren.

8E. Definieren Sie: Ein *Produkt* von Objekten $(X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in einer Kategorie $\mathtt{C}$ ist...

▶▶ ... eine terminale Familie $(P, (p_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ bestehend aus einem Objekt P und einem Morphismus $p_\lambda : P \to X_\lambda$ für jedes $\lambda \in \Lambda$. Terminal bedeutet ausführlich: Für jede solche Familie $(P', (p'_\lambda)_{\lambda\in\Lambda})$ existiert genau ein Morphismus $f : P' \to P$ mit $p_\lambda \circ f = p'_\lambda$ für alle $\lambda \in \Lambda$.

Erläuterung: Zeichnen Sie das zugehörige kommutative Diagramm! Am übersichtlichsten gelingt dies für den Spezialfall $\Lambda = \{1, 2\}$ von zwei Faktoren, $P = X_1 \times X_2$. Sie kennen Produkte von Mengen („kartesisches Produkt") und topologischen Räumen, Vektorräumen, Gruppen, etc. Es wird jeweils durch die obige universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert.

Zur Illustration zeigt die nächste Aufgabe ein etwas exotisches Beispiel. Es scheint Ihnen vielleicht zunächst überraschend, nach einigem Bedenken dann hoffentlich ganz natürlich.

Zur Erinnerung hier nochmal die definierenden Diagramme für paarweises Produkt und Summe, also $\Lambda = \{1, 2\}$. Wie können Sie sich das bequem merken oder anschaulich vorstellen? Zum Glück kennen Sie Produkt und Summe von Mengen und von topologischen Räumen! Die allgemeine Definition fasst die wesentliche Abbildungseigenschaft knapp und elegant zusammen.

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, equal] & P \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & X_2 \arrow[d, equal] \\
X_1 & P' \arrow[l, "p'_1"] \arrow[r, "p'_2"'] \arrow[u, dashed, "\exists!\, f"'] & X_2
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[d, equal] \arrow[r, "i_1"] & S \arrow[d, dashed, "\exists!\, f"'] & X_2 \arrow[l, "i_2"'] \arrow[d, equal] \\
X_1 \arrow[r, "i'_1"] & S' & X_2 \arrow[l, "i'_2"']
\end{tikzcd}$$

8F. Wir betrachten $(\mathbb{R}, \leq)$ als Kategorie mit Objekten $x, y, \ldots \in \mathbb{R}$. Für $x \leq y$ gibt es genau einen Morphismus $f : x \to y$, sonst keinen. Die Komposition entspricht der Transitivität.

Was ist das Produkt der Objekte $x_1 = 42$ und $x_2 = 2017$ in der Kategorie $(\mathbb{R}, \leq)$?

▶▶ Die Antwort lautet 42. Nach obiger Definition ist $p = \inf(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ das Produkt von $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$: Die Familie $(\, p,\ (p \leq x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,)$ ist terminal bezüglich aller Familien $(\, p',\ (p' \leq x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}\,)$.