Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

<table>
<tr><td>Name:</td><td rowspan="3">Name des Tutors (oder Bild ankreuzen):
</td></tr>
<tr><td>Vorname:</td></tr>
<tr><td>Matrikelnummer:</td></tr>
</table>

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/18	/12	/10	/10	/12	/13	/76

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (*18 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

2A. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$? ☐ Ja ☐ Nein

2B. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$? ☐ Ja ☐ Nein

2C. Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist surjektiv. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Jede Topologie wird von mindestens einer Metrik induziert. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Jede Topologie wird von höchstens einer Metrik induziert. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert das zweite. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste. ☐ Ja ☐ Nein

2K. Jeder separable metrisierbare Raum ist zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2L. Jeder normierte $\mathbb{R}$–Vektorraum ist zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2M. Jeder metrisierbare Raum ist erstabzählbar und hausdorffsch. ☐ Ja ☐ Nein

2N. Jeder zweitabzählbare reguläre (T_1&T_3) Raum ist metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

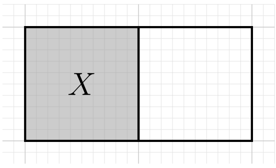
2O. Jeder Quotientenraum eines Hausdorff–Raums ist hausdorffsch. ☐ Ja ☐ Nein

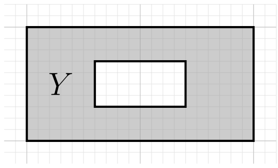
2P. Jeder Teilraum eines Hausdorff–Raums ist hausdorffsch. ☐ Ja ☐ Nein

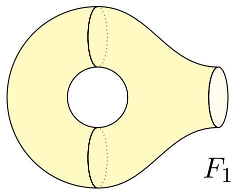
2Q. Die Summentopologie auf $X \sqcup Y$ besteht genau aus
den Vereinigungen $U \sqcup V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. ☐ Ja ☐ Nein

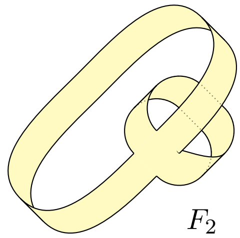
2R. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ besteht genau aus
den Produkten $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Ja, nein, warum? (3+3+3+3=12 Punkte)*









3A. Nennen Sie die Euler–Charakteristik der gezeigten Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ und $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$\chi(X) =$

$\chi(Y) =$

$\chi(F_1) = \chi(F_2) =$

3B. Sind die skizzierten Flächen $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$ homöomorph?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3C. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ eine Überdeckung durch abgeschlossene Mengen $A_i \subset X$, und jede Einschränkung $f|_{A_i} : A_i \to Y$ sei stetig. Ist dann f stetig?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

3D. Erlaubt der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ für seine Topologie $\mathcal{T}$ eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

Aufgabe 4. *Produkte* (*2+3+3+2=10 Punkte*)

4A. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt und $p_i : X \to X_i$ die kanonischen Projektionen. Definieren Sie die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf X durch eine Basis $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \qquad \middle| \qquad \right\}$$

4B. Welche universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert den Produktraum $(X, \mathcal{T})$?

4C. Ist der Produktraum $[0,1]^{\mathbb{N}}$ metrisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Metrik oder Hindernis:

4D. Ist der Produktraum $[0,1]^{\mathbb{R}}$ metrisierbar?

☐ Ja ☐ Nein. Metrik oder Hindernis:

Aufgabe 5. *Teilräume und Quotienten (2+2+3+3=10 Punkte)*

5A. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q : X \twoheadrightarrow Q = X/R$ die Quotientenabbildung. Definieren Sie die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$ auf Q:

$$\mathcal{T}_Q = \left\{ \qquad \middle| \qquad \right\}$$

5B. Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum, $B \subset Y$ eine Teilmenge und $\iota : B \hookrightarrow Y$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Definieren Sie die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_B$ auf B:

$$\mathcal{T}_B = \left\{ \qquad \middle| \qquad \right\}$$

5C. Was besagt die kanonische Faktorisierung einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$?

5D. Ist für jeden erstabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum $X/_\sim$ erstabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Aufgabe 6. *Einbettungen und Identifizierungen (3+3+3+3=12 Punkte)*

6A. Sei $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $s(x,y) = (x,y,0)$. Ist s eine Einbettung?

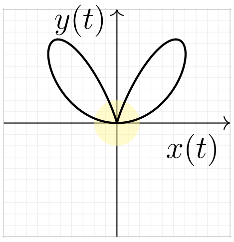
☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

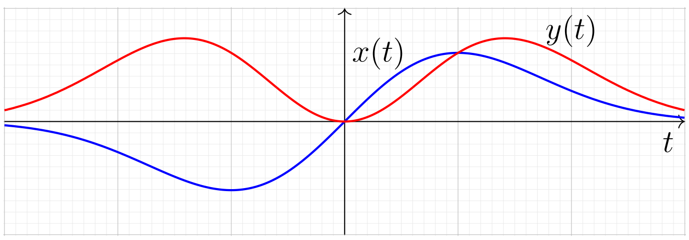
6B. Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p(x,y,z) = (x,y)$. Ist p eine Identifizierung?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6C. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ zwischen Teilräumen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:





6D. Die Skizze zeigt die injektive und glatte Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ mit den Koordinatenfunktionen $x(t) = t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$ und $y(t) = t^2\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$. Ist f eine Einbettung?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

Aufgabe 7. *Homöomorphie, jetzt oder nie!* (*3+3+3+4=13 Punkte*)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei wie üblich $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die euklidische Norm, $\mathbb{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1 \}$ der abgeschlossene Einheitsball sowie $\mathbb{B}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$ der offene Einheitsball und $\mathbb{S}^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \}$ die Einheitssphäre. Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

7A. Auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $|x| = |y|$. Geben Sie zum Quotienten $\mathbb{D}^2/_\sim$ einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an für ein $n \in \mathbb{N}$, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : X \to \mathbb{D}^2/_\sim$ und $g : \mathbb{D}^2/_\sim \to X$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

7B. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $\mathbb{R}_{>0} \cdot x = \mathbb{R}_{>0} \cdot y$. Geben Sie zum Quotienten $X/_\sim$ einen homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^n$ an, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : Y \to X/_\sim$ und $g : X/_\sim \to Y$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

7C. Geben Sie zueinander inverse Homöomorphismen an zwischen $U := \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{e_3\}$ und $\mathbb{R}^2$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

7D. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x - y \in \mathbb{Z}$. Geben Sie zum Quotientenraum $\mathbb{R}/_\sim$ einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an sowie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to X$ mit induzierter stetiger Bijektion $\bar{f} : \mathbb{R}/_\sim \to X$. Warum ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus?