


Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Name des Tutors (oder Bild ankreuzen):
Vorname: Musterlösung	
Matrikelnummer: Musterlösung	

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/18	/12	/10	/10	/12	/13	/76

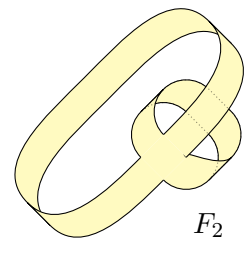
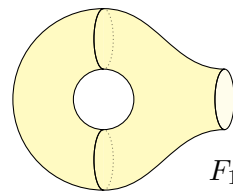
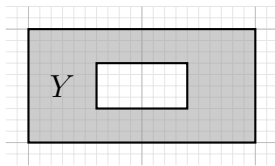
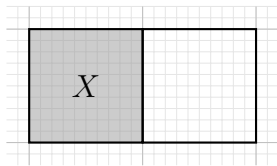
Vorwort zur Musterlösung: Diese Klausur dient als Zwischenbilanz zur Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Definitionen und Sätze, Beispiele und Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung. Die Fragen sind sehr zahlreich aber leicht: Sie wurden in Vorlesung und/oder Übung diskutiert, nur wenige erfordern Anwendung der Techniken auf ein variiertes Beispiel. Gefragt ist, ein passendes Werkzeug zu nennen oder ein einfaches Beispiel einzuordnen. Diesen unspektakulären aber nützlichen Fragentyp können Sie zur Diagnose nutzen, und auch ähnliche Fragen selbst entwickeln, um Begriffe und Techniken einzuüben. Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (18 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

- 2A.** Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} / (2k)!$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$? Ja Nein
- 2B.** Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} / (2k)!$ gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} ? Ja Nein
- 2C.** Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Ja Nein
- 2D.** Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ja Nein
- 2E.** Die Abbildung $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv. Ja Nein
- 2F.** Die Abbildung $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R}) : f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist surjektiv. Ja Nein
- 2G.** Jede Topologie wird von mindestens einer Metrik induziert. Ja Nein
- 2H.** Jede Topologie wird von höchstens einer Metrik induziert. Ja Nein
- 2I.** Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert das zweite. Ja Nein
- 2J.** Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste. Ja Nein
- 2K.** Jeder separable metrisierbare Raum ist zweitabzählbar. Ja Nein
- 2L.** Jeder normierte \mathbb{R} -Vektorraum ist zweitabzählbar. Ja Nein
- 2M.** Jeder metrisierbare Raum ist erstabzählbar und hausdorffsch. Ja Nein
- 2N.** Jeder zweitabzählbare reguläre $(T_1 \& T_3)$ Raum ist metrisierbar. Ja Nein
- 2O.** Jeder Quotientenraum eines Hausdorff-Raums ist hausdorffsch. Ja Nein
- 2P.** Jeder Teilraum eines Hausdorff-Raums ist hausdorffsch. Ja Nein
- 2Q.** Die Summentopologie auf $X \sqcup Y$ besteht genau aus den Vereinigungen $U \sqcup V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. Ja Nein
- 2R.** Die Produkttopologie auf $X \times Y$ besteht genau aus den Produkten $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. Ja Nein

Aufgabe 3. Ja, nein, warum? (3+3+3+3=12 Punkte)



3A. Nennen Sie die Euler-Charakteristik der gezeigten Mengen $X, Y \subset \mathbb{R}^2$ und $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$.

$\chi(X) = 0$
$\chi(Y) = 0$
$\chi(F_1) = \chi(F_2) = -1$

3B. Sind die skizzierten Flächen $F_1, F_2 \subset \mathbb{R}^3$ homöomorph?

Ja Nein. Begründung: Beide Flächen F_1 und F_2 sind zusammenhängend. Sie haben die gleiche Euler-Charakteristik (3A), Orientierbarkeit und Anzahl an Randkomponenten. Nach dem Klassifikationssatz der kompakten Flächen sind sie homöomorph.

Alternative: Einen Homöomorphismus kann man auch zeichnerisch veranschaulichen. Oft ist der Klassifikationssatz jedoch leichter und direkter anzuwenden.

3C. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ eine Überdeckung durch abgeschlossene Mengen $A_i \subset X$, und jede Einschränkung $f|_{A_i} : A_i \rightarrow Y$ sei stetig. Ist dann f stetig?

Ja Nein. Begründung:

Das ist ein Spezialfall des Verklebesatzes für stetige Abbildungen.

Erläuterung: Der Verklebesatz gilt für beliebige offene Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ oder lokal-endliche abgeschlossene Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Hier $I = \{1, \dots, n\}$. Ist $B \subset Y$ abgeschlossen, so auch $f|_{A_i}^{-1}(B)$ in A_i , somit auch $f^{-1}(B) = f|_{A_1}^{-1}(B) \cup \dots \cup f|_{A_n}^{-1}(B)$ in X .

3D. Erlaubt der euklidische Raum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{T})$ für seine Topologie \mathcal{T} eine abzählbare Basis \mathcal{B} ?

Ja Nein. Begründung:

Konkret: $\mathcal{B} = \{ \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\mid a_i < b_i \text{ in } \mathbb{Q} \}$
 Alternativ: $\mathcal{B} = \{ B(a, r) \mid a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0} \}$ oder $\mathcal{B} = \{ B(a, 1/k) \mid a \in \mathbb{Q}^n, k \in \mathbb{N}_{\geq 1} \}$
 Abstrakt: \mathbb{R}^n ist metrisierbar und separabel ($\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$), nach 2K also zweitabzählbar.

Aufgabe 4. Produkte (2+3+3+2=10 Punkte)

4A. Seien (X_i, \mathcal{T}_i) topologische Räume, $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt und $p_i : X \rightarrow X_i$ die kanonischen Projektionen. Definieren Sie die Produkttopologie \mathcal{T} auf X durch eine Basis \mathcal{B} :

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \cdots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \\ \left \right. \\ n \in \mathbb{N}, i_k \in I, U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k} \end{array} \right\}$
<p><i>Erläuterung:</i> Wir bilden nur endliche Schnitte! Mehrere Schreibweisen sind möglich, etwa $\prod_{i \in I} U_i$ mit $U_i \in \mathcal{T}_i$, wobei $U_i = X_i$ für fast alle $i \in I$ (also alle bis auf endlich viele).</p>

4B. Welche universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert den Produktraum (X, \mathcal{T}) ?

<p>Zu jeder Familie stetiger Abbildungen $f_i : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ mit $i \in I$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ mit der Eigenschaft $p_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$.</p>
<p><i>Erläuterung:</i> Gegeben sind die topologischen Räume (X_i, \mathcal{T}_i) für $i \in I$. Der Produktraum (X, \mathcal{T}) erlaubt die stetigen Abbildungen $p_i : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$. Die Produkttopologie ist wie folgt charakterisiert: Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig, wenn jede Komposition $p_i \circ f : (Y, \mathcal{T}_Y) \rightarrow (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig ist.</p>

4C. Ist der Produktraum $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ metrisierbar?

<p><input checked="" type="checkbox"/> Ja <input type="checkbox"/> Nein. Metrik oder Hindernis:</p>
<p>Eine geeignete Metrik ist $d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} x_k - y_k$.</p>
<p><i>Erläuterung:</i> Jedes abzählbare Produkt metrisierbarer Räume ist ebenso metrisierbar. Der Hilbert-Würfel $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ ist Grundlage des Metrisierungssatzes von Urysohn.</p>

4D. Ist der Produktraum $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ metrisierbar?

<p><input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Metrik oder Hindernis:</p>
<p>Da \mathbb{R} überabzählbar ist, erfüllt $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom (2M),</p>
<p><i>Erläuterung:</i> Das konkrete Beispiel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wurde in der Vorlesung ausgeführt. Allgemein gilt: Ein überabzählbares Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ ist nicht metrisierbar, wobei wir $X_i \geq 2$ für alle $i \in I$ voraussetzen, um triviale Sonderfälle auszuschließen.</p>

Aufgabe 5. *Teilräume und Quotienten* (2+2+3+3=10 Punkte)

5A. Sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q : X \twoheadrightarrow Q = X/R$ die Quotientenabbildung. Definieren Sie die Quotiententopologie \mathcal{T}_Q auf Q :

$\mathcal{T}_Q = \left\{ \begin{array}{l} V \subset Q \end{array} \right.$		$q^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$
--	--	-------------------------------

5B. Sei (Y, \mathcal{T}_Y) ein topologischer Raum, $B \subset Y$ eine Teilmenge und $\iota : B \hookrightarrow Y$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Definieren Sie die Teilraumtopologie \mathcal{T}_B auf B :

$\mathcal{T}_B = \left\{ \begin{array}{l} V \cap B = \iota^{-1}(V) \end{array} \right.$		$V \in \mathcal{T}_Y$
---	--	-----------------------

5C. Was besagt die kanonische Faktorisierung einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$?

<p>Es gilt $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ mit der stetigen Bijektion $\bar{f} : X/R_f \rightarrow f(X) : [x] \mapsto f(x)$.</p>
<p><i>Erläuterung:</i> Wir nutzen hierbei die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/R_f : x \mapsto [x]$ mit obiger Quotiententopologie auf $Q = X/R_f$, und die Teilrauminklusion $\iota : f(X) \hookrightarrow Y : y \mapsto y$ mit obiger Teilraumtopologie auf $B = f(X)$.</p>
<p>Alternativ ist auch die Darstellung als kommutatives Diagramm möglich, und vermutlich suggestiver. Entscheidend ist in beiden Darstellungen die Aussage, dass die induzierte Abbildung \bar{f} bijektiv und stetig ist: Die Stetigkeit verdanken wir den oben definierten Topologien.</p>
<p><i>Warnung:</i> Im Allgemeinen ist \bar{f} kein Homöomorphismus, sondern nur eine stetige Bijektion! Ist zudem f offen oder abgeschlossen, so auch \bar{f}, und somit ist \bar{f} ein Homöomorphismus.</p>

5D. Ist für jeden erstabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum X/\sim erstabzählbar?

<p><input type="checkbox"/> Ja <input checked="" type="checkbox"/> Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:</p>
<p>Als Gegenbeispiel kennen wir $\mathbb{R} // \mathbb{Z}$ aus der Übung.</p>
<p><i>Erläuterung:</i> Auch $\mathbb{R} // \mathbb{Q}$ ist ein Gegenbeispiel. Das ist analog zu $\mathbb{R} // \mathbb{Z}$ aber etwas komplizierter (und wurde in Vorlesung und Übung nicht behandelt). Weitere Gegenbeispiele sind möglich. . .</p>

Aufgabe 6. *Einbettungen und Identifizierungen (3+3+3+3=12 Punkte)*

6A. Sei $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $s(x, y) = (x, y, 0)$. Ist s eine Einbettung?

Ja Nein. Begründung:

Die Abbildung s ist stetig, und es gilt $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit der Retraktion p aus 6B.
 Alternativ: Die Abbildung s ist injektiv, stetig und abgeschlossen, somit einbettend. Abgeschlossenheit ist jedoch nicht ganz offensichtlich und muss bewiesen werden; das wurde diesmal in Vorlesung und Übung nicht ausgeführt. *Warnung:* Die Abbildung s ist nicht offen!

6B. Sei $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p(x, y, z) = (x, y)$. Ist p eine Identifizierung?

Ja Nein. Begründung:

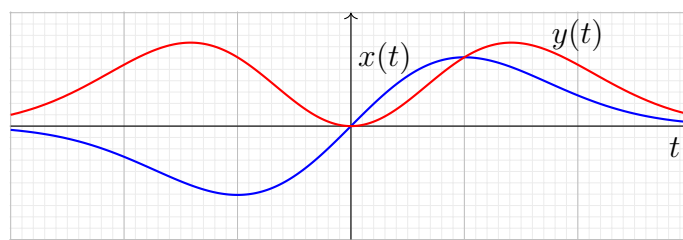
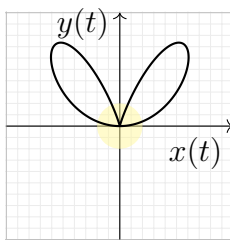
Die Abbildung p ist stetig, und es gilt $p \circ s = \text{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit dem Schnitt s aus 6A.
 Alternativ: Die Abbildung p ist surjektiv, stetig und offen, somit identifizierend. Offenheit ist jedoch nicht ganz offensichtlich und muss bewiesen werden; das wurde diesmal in Vorlesung und Übung nicht ausgeführt. *Warnung:* Die Abbildung p ist nicht abgeschlossen!

6C. Ist jede stetige Bijektion $f : X \rightarrow Y$ zwischen Teilräumen $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ ein Homöomorphismus?

Ja Nein. Begründung:

Ein Gegenbeispiel ist $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{S}^1 : f(t) = e^{2\pi it}$.

Noch elementarer (und ganz in \mathbb{R}) ist die stetige Bijektion $f : X \rightarrow Y$ mit $X = [0, 1[\cup [2, 3[$ und $Y = [0, 2[$ definiert durch $f(x) = x$ für $0 \leq x < 1$ und $f(x) = x - 1$ für $2 \leq x < 3$.
 Alternativ: Jede Bijektion $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ ist stetig aber kein Homöomorphismus.



6D. Die Skizze zeigt die injektive und glatte Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ mit den Koordinatenfunktionen $x(t) = t e^{-t^2/2}$ und $y(t) = t^2 e^{-t^2/2}$. Ist f eine Einbettung?

Ja Nein. Begründung: In \mathbb{R} ist $] -1, 1[$ offen, aber $f(] -1, 1[)$ ist nicht offen in $f(\mathbb{R})$.

Erläuterung: Man betrachte die Skizze; $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ ist eine stetige Bijektion, aber kein Homöomorphismus. Jede Umgebung von $(0, 0)$ im Bildraum $f(\mathbb{R})$ enthält $B((0, 0), \varepsilon) \cap f(\mathbb{R})$ und somit nicht nur den waagrechten Teil sondern auch noch die beiden senkrechten Enden! Schlimmer noch, es kann keinen Homöomorphismus geben zwischen \mathbb{R} und $f(\mathbb{R})$: Topologische Hindernisse sind die Kompaktheit und der (lokale) Zusammenhang.

Aufgabe 7. *Homöomorphie, jetzt oder nie!* (3+3+3+4=13 Punkte)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei wie üblich $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ die euklidische Norm, $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball sowie $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ der offene Einheitsball und $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ die Einheitssphäre. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n .

7A. Auf der Einheitskreisscheibe \mathbb{D}^2 definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $|x| = |y|$. Geben Sie zum Quotienten \mathbb{D}^2/\sim einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an für ein $n \in \mathbb{N}$, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : X \rightarrow \mathbb{D}^2/\sim$ und $g : \mathbb{D}^2/\sim \rightarrow X$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

Der Quotient \mathbb{D}^2/\sim ist homöomorph zum Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ vermöge:	
$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}^2/\sim,$	$f(r) = [(r, 0)] = r \cdot \mathbb{S}^1$
$g : \mathbb{D}^2/\sim \rightarrow [0, 1],$	$g([x]) = x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$
<i>Erläuterung:</i> Wie kommt man auf solche Formeln? Machen Sie eine Skizze! Das äquivalente Beispiel \mathbb{R}^2/\sim wurde in der Übung diskutiert. Stehen die Formeln erst einmal da, ist der Rest leicht: Wohldefiniertheit, Stetigkeit, $g \circ f = \text{id}$ und $f \circ g = \text{id}$ rechnet man geduldig nach, das war hier aber nicht verlangt.	

7B. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $\mathbb{R}_{>0} \cdot x = \mathbb{R}_{>0} \cdot y$. Geben Sie zum Quotienten X/\sim einen homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^n$ an, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : Y \rightarrow X/\sim$ und $g : X/\sim \rightarrow Y$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

Der Quotient $(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$ ist homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ vermöge:	
$f : \mathbb{S}^2 \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0},$	$f(s) = [s] = \mathbb{R}_{>0} \cdot s$
$g : (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{S}^2,$	$g([x]) = x/ x $
<i>Erläuterung:</i> Wie kommt man auf solche Formeln? Machen Sie eine Skizze! Stehen die Formeln erst einmal da, ist der Rest leicht: Wohldefiniertheit, Stetigkeit, $g \circ f = \text{id}$ und $f \circ g = \text{id}$ rechnet man geduldig nach, das war hier aber nicht verlangt.	

7C. Geben Sie zueinander inverse Homöomorphismen an zwischen $U := \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ und \mathbb{R}^2 . (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

Machen Sie sich eine Skizze! Stereographische Projektion für beliebiges n :	
$f : \mathbb{R}^{n+1} \supset U \rightarrow \mathbb{R}^n,$	$f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \frac{1}{1 - x_{n+1}}(x_1, \dots, x_n),$
$g : \mathbb{R}^n \rightarrow U \subset \mathbb{R}^{n+1},$	$g(y_1, \dots, y_n) = \frac{1}{ y ^2 + 1}(2y_1, \dots, 2y_n, y ^2 - 1).$
<i>Erläuterung:</i> Wir kennen diese stereographische Projektion f aus Vorlesung und Übung; Die erste Formel ergibt sich leicht aus einer Skizze, die Umkehrung muss man ausrechnen. Stehen die Formeln erst einmal da, so ist der Rest leicht: Die Wohldefiniertheit von f ist klar, die von g rechnet man leicht nach, die Stetigkeit ist klar als Verkettung stetiger Funktionen, und schließlich gilt $g \circ f = \text{id}$ und $f \circ g = \text{id}$. Somit liefert die stereographische Projektion den Homöomorphismus $(f, g) : \mathbb{S}^n \setminus \{*\} \cong \mathbb{R}^n$. (Diese Ausführung war hier nicht verlangt.)	

7D. Auf \mathbb{R} definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x - y \in \mathbb{Z}$. Geben Sie zum Quotientenraum \mathbb{R}/\sim einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an sowie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit induzierter stetiger Bijektion $\bar{f} : \mathbb{R}/\sim \rightarrow X$. Warum ist \bar{f} ein Homöomorphismus?

Der Quotient \mathbb{R}/\sim ist homöomorph zur Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ vermöge:	
$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1,$	$f(t) = \exp(2\pi it)$
und	$\bar{f} : \mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{S}^1,$
	$\bar{f}(t + \mathbb{Z}) = \exp(2\pi it)$
Dank kanonischer Faktorisierung ist \bar{f} eine stetige Bijektion. Wir müssen beweisen, dass \bar{f} tatsächlich ein Homöomorphismus ist. Hierzu kennen wir drei unabhängige Beweise:	
(1) f ist ein lokaler Homöomorphismus vermöge $f_\theta : U_\theta :=]\theta - 1/2, \theta + 1/2[\xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \setminus \{-e^{2\pi i\theta}\} =: V_\theta$ oder auch Einschränkungen hiervon. Insbesondere ist f offen und somit identifizierend.	
(2) Wir können hieraus explizit eine stetige Umkehrfunktion $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ konstruieren durch Verkleben der lokalen Umkehrungen $g \circ f_\theta^{-1} : \mathbb{S}^1 \supset V_\theta \rightarrow \mathbb{R}/\sim$, formal also $g = \bigcup_{\theta \in \mathbb{R}} g \circ f_\theta^{-1}$.	
<i>Warnung:</i> Die naive Idee $f^{-1}(z) = \frac{1}{2\pi i} \ln(z)$ ist gefährlicher Unsinn! Zur $2\pi i$ -periodischen Funktion $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ist $\ln : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$ als Umkehrfunktion nicht eindeutig, und egal bei welchen Wahlen nicht stetig: Wir können willkürlich Urbilder wählen, erhalten aber niemals eine <i>stetige</i> Umkehrfunktion $\ln : \mathbb{C}^\times \rightarrow \mathbb{C}$. Erst \bar{f} und g beheben dieses fundamentale Problem.	
(3) Die Quotientenabbildung $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\sim$ ist stetig. Mit $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist auch $q([0, 1]) = \mathbb{R}/\sim$ kompakt. Auf der anderen Seite ist \mathbb{S}^1 hausdorffsch. Somit ist $\bar{f} : \mathbb{R}/\sim \rightarrow \mathbb{S}^1$ nicht nur eine stetige Bijektion, sondern zudem abgeschlossen und somit ein Homöomorphismus.	