Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/21	/10	/8	/23	/7	/82

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (12 Punkte)*

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr).
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2B. Jede kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2C. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2D. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Jeder metrisierbare Raum ist separabel und zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Jeder separable und zweitabzählbare Raum ist metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Jeder metrisierbare Raum ist regulär (T_1&T_3) und zweitabzählbar. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Jeder zweitabzählbare und reguläre (T_1&T_3) Raum ist metrisierbar. ☐ Ja ☐ Nein

2I. In der Summentopologie auf $X \sqcup Y$ ist jede offene Menge
eine Vereinigung $U \sqcup V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. ☐ Ja ☐ Nein

2J. In der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist jede offene Menge
ein Produkt $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. ☐ Ja ☐ Nein

2K. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und zusammenhängend,
so ist X wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2L. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend,
so ist X wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Grundbegriffe* (*2+2+2+2+1 + 3+3+2+2+2 = 21 Punkte*)

3A. Ist für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(V, |-|)$ die induzierte Topologie erstabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3B. Ist für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(V, |-|)$ die induzierte Topologie zweitabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3C. Ist für jeden zweitabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum $X/_\sim$ zweitabzählbar?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume mit $\operatorname{card}(X_i) \geq 2$ für alle $i \in I$.

3D. Sei $d_i : X_i \times X_i \to [0, 1]$ eine Metrik für $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Wann ist der Produktraum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar? Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung sowie eine Metrik.

Bedingung und Metrik:

3E. Unter welcher Bedingung ist der Produktraum $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt? Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung bezüglich I und $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$.

Bedingung:

3F. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subset Y$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3G. Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3H. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ zusammenhängende Teilräume, $n \geq 1$.
Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

3I. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ abgeschlossen. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

3J. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ offen. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

Aufgabe 4. *Quotienten und Flächen (2+2+3+3 = 10 Punkte)*

Wir erinnern an die Flächen $F_g^+ \cong \mathbb{D}^2/\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ und $F_g^- \cong \mathbb{D}^2/\langle c_0 c_0 \cdots c_g c_g \rangle$. Wir teilen die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ in n Kreisbögen $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp[2\pi \mathrm{i}(k-1+t)/n]$ für $k = 1, 2, \dots, n$. Sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in A^n$ ein Wort über dem Alphabet $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, \dots\}$; bei $w_k = w_\ell$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(t)$ für jedes $t \in [0,1]$; bei $w_k = w_\ell^{-1}$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(1-t)$ für jedes $t \in [0,1]$. Sei $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle := \mathbb{D}^2/_\sim$ der Quotientenraum.

4A. Ist $\mathbb{D}^2/\langle\, aaa \,\rangle$ eine geschlossene Fläche? Wenn ja, welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

4B. Ist $\mathbb{D}^2/\langle\, aba^{-1} \,\rangle$ eine geschlossene Fläche? Wenn ja, welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

4C. Ist $\mathbb{D}^2/\langle abdccbda \rangle$ eine geschlossene Fläche? Wenn ja, welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

4D. Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Auf der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $u \approx v$ durch $u = v$ oder ($u, v \in \mathbb{S}^1$ und $u^n = v^n$). Beschreiben Sie $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ durch ein Wort w.

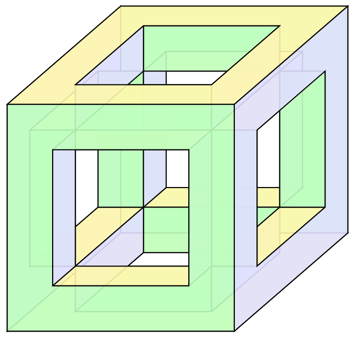
Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{D}^2/_\approx, [1]) = \langle\, S \mid R \,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.

Aufgabe 5. *Flächen und Quotienten* (*2+2+2+2 = 8 Punkte*)

Sei $(a,b,c,d) = (-1, -1/2, 1/2, 1)$. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir folgendes Polyeder:

$$K = [a,d]^3 \smallsetminus \Big(\big([a,d] \times]b,c[\times]b,c[\big) \cup \big(]b,c[\times [a,d] \times]b,c[\big) \cup \big(]b,c[\times]b,c[\times [a,d]\big)\Big)$$

Wir erhalten einen Henkelkörper wie rechts skizziert.



5A. Das Polyeder K enthält einen Graphen $G \subset K$ als starken Homotopie-Retrakt. Geben Sie einen solchen Graphen an und folgern Sie die Euler–Charakteristik $\chi(K)$.

5B. Der Rand $F = \partial K$ ist eine geschlossene Fläche: welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$? Folgern Sie die Euler–Charakteristik $\chi(F)$.

5C. Die Rotation $\rho : (x,y,z) \mapsto (-x,-y,z)$ um die z–Achse bildet F auf sich selbst ab. Bestimmen Sie den Quotienten $F/\langle\, \rho \,\rangle$, also F modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$, als Fläche $F_{g,r}^\pm$.

5D. Die Spiegelung $\sigma : (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$ an der y–z–Ebene bildet F auf sich selbst ab. Bestimmen Sie den Quotienten $F/\langle\, \sigma \,\rangle$, also F modulo $(x,y,z) \sim (-x,y,z)$, als Fläche $F_{g,r}^\pm$.

Aufgabe 6. *Klassische Gruppen* (*2+3+3+1 + 2+2 + 2+2+2+2+2 = 23 Punkte*)

6A. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{SL}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1 \}$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6B. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{SO}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^{\intercal} A = 1_{n\times n},\ \det A = 1 \}$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6C. Gibt es in $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ eine kompakte Untergruppe K, sodass die Inklusion $K \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt ist? Nennen Sie ein Hindernis oder K mit Beweisidee.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6D. Nennen Sie die Zerlegung $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R})$.

6E. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) = \langle\, S \mid R\,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.

Realisieren Sie jeden Erzeuger explizit durch eine Schleife $\alpha : ([0,1], \{0,1\}) \to (\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1)$.

6F. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1) = \langle\, S \mid R\,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.

Realisieren Sie jeden Erzeuger explizit durch eine Schleife $\beta : ([0,1], \{0,1\}) \to (\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1)$.

6G. Wir untersuchen $r : \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} \to X := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} : A \mapsto Ae_1$. Ist r eine Retraktion?
Nennen Sie eine stetige Abbildung $i : X \to \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ oder ein Hindernis.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

Ist $\pi_1(r) : \pi_1(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, e_1)$ ein Gruppenisomorphismus?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6H. Ist die Inklusion $i : (\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) \hookrightarrow (\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1) : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Homotopie-Äquivalenz?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6I. Ist der Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 : 1 \mapsto \overline{1}$ in `Grp` ein Retrakt?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

6J. Ist die Inklusion $i : (\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}, 1) \hookrightarrow (\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}, 1) : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in `Top` ein Retrakt?
Nennen Sie eine stetige Abbildung $r : \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}}$ oder ein Hindernis.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

Aufgabe 7. *Sphären und projektive Räume (2+2+3 = 7 Punkte)*

7A. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] = \mathscr{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3)/\text{Homotopie}$?

Antwort und Beweisidee:

7B. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2] = \mathscr{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)/\text{Homotopie}$?

Antwort und Beweisidee:

Wir betrachten die komplex-projektive Gerade und $h : \mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\})/(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ wie in der Vorlesung. Die Inklusion $j : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ und der Quotient $q : \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1$ definieren die berühmte Hopf–Faserung $p := h \circ q \circ j : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, kurz $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$.

7C. Ist $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ eine Retraktion?
Nennen Sie eine stetige Abbildung $i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^2}$ oder ein Hindernis.

☐ Ja ☐ Nein. Begründung: