Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte Ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Für jede der Binary-Choice-Fragen der Aufgabe 2 gibt es einen Punkt bei richtiger Antwort, keinen Punkt bei fehlender Antwort, und einen Punkt Abzug bei falscher Antwort. Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/21	/10	/8	/23	/7	/82

Die Klausur bietet etwas zu viele Fragen für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Die Themen sind recht bunt gemischt. Die Aufgaben 3 und 6 habe ich nicht zweigeteilt.

Tipp: Viele Fragen sind Wiederholungen aus Vorlesung und Übung; sie sollen Fleiß in den Übungen und Sorgfalt in der Vorbereitung belohnen. Das sind leichte Punkte — leider oft vergeudet. Falls Sie diese Weisheit *vor* Ihrer eigenen Klausur lesen: Nutzen Sie Ihre Übungen!

Vorwort zur Musterlösung: Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (*12 Punkte*)

Beurteilen Sie folgende Aussagen mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr).
Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen.

2A. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt. [X] Ja [ ] Nein

2B. Jede kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

2C. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. [X] Ja [ ] Nein

2D. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. [X] Ja [ ] Nein

2E. Jeder metrisierbare Raum ist separabel und zweitabzählbar. [ ] Ja [X] Nein

2F. Jeder separable und zweitabzählbare Raum ist metrisierbar. [ ] Ja [X] Nein

2G. Jeder metrisierbare Raum ist regulär (T_1&T_3) und zweitabzählbar. [ ] Ja [X] Nein

2H. Jeder zweitabzählbare und reguläre (T_1&T_3) Raum ist metrisierbar. [X] Ja [ ] Nein

2I. In der Summentopologie auf $X \sqcup Y$ ist jede offene Menge
eine Vereinigung $U \sqcup V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. [X] Ja [ ] Nein

2J. In der Produkttopologie auf $X \times Y$ ist jede offene Menge
ein Produkt $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. [ ] Ja [X] Nein

2K. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und zusammenhängend,
so ist X wegzusammenhängend. [ ] Ja [X] Nein

2L. Ist $X \subset \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend,
so ist X wegzusammenhängend. [X] Ja [ ] Nein

Aufgabe 3. *Grundbegriffe* (*2+2+2+2+1 + 3+3+2+2+2 = 21 Punkte*)

3A. Ist für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(V, |-|)$ die induzierte Topologie erstabzählbar?

[X] Ja [ ] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Zu $a \in V$ bilden die Bälle $B(a, 1/n)$ für $n = 1, 2, 3, \dots$ eine abzählbare Umgebungsbasis.

Erinnerung: Das gilt allgemein für jeden metrischen Raum.

3B. Ist für jeden normierten $\mathbb{R}$–Vektorraum $(V, |-|)$ die induzierte Topologie zweitabzählbar?

[ ] Ja [X] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Als Gegenbeispiel kennen wir den Vektorraum $V = \mathscr{C}_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit Supremums–Norm.

Erinnerung: Stückweise affine Interpolation liefert $\{0, 1\}^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow V$ überabzählbar und diskret.

3C. Ist für jeden zweitabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum $X/_\sim$ zweitabzählbar?

[ ] Ja [X] Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Als Gegenbeispiel kennen wir das unendliche Bouquet $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ aus der Übung. (Nicht $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$!)

Erinnerung: Die Quotiententopologie ist nicht erstabzählbar, also auch nicht zweitabzählbar.

Sei $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ das Produkt topologischer Räume mit $\operatorname{card}(X_i) \geq 2$ für alle $i \in I$.

3D. Sei $d_i : X_i \times X_i \to [0, 1]$ eine Metrik für $(X_i, \mathcal{T}_i)$. Wann ist der Produktraum $(X, \mathcal{T})$ metrisierbar? Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung sowie eine Metrik.

Bedingung und Metrik:

Notwendig und hinreichend ist, dass I abzählbar ist, also ein *abzählbares Produkt* vorliegt.

Dann wird der Raum $(X, \mathcal{T})$ metrisiert durch $d : X \times X \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \sum_{i \in I} a_i d_i(x_i, y_i)$.

Hierzu sei $a_i \in \mathbb{R}_{>0}$ und $\sum_{i \in I} a_i < \infty$, für $I = \mathbb{N}$ zum Beispiel $a_i = 2^{-1-i}$ mit $\sum_{i \in \mathbb{N}} a_i = 1$.

3E. Unter welcher Bedingung ist der Produktraum $(X, \mathcal{T}) = \prod_{i \in I}(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt?
Nennen Sie die notwendige und hinreichende Bedingung bezüglich I und $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$.

Bedingung:

Satz von Tychonoff: Notwendig und hinreichend ist, dass jeder Faktor $(X_i, \mathcal{T}_i)$ kompakt ist.

($\dots$ oder ein $X_i = \emptyset$, aber diesen Sonderfall haben wir zur Vereinfachung ausgeschlossen.)

3F. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann $f(A) \subset Y$ kompakt?

$\boxed{X}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Beweis: Sei $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung in Y.
Da f stetig ist, ist $U_i = f^{-1}(V_i)$ in X offen für jedes $i \in I$.
Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ in X.
Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung, $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
Aus $f(U_i) \subset V_i$ folgt $f(A) \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

3G. Sei X kompakt und Y hausdorffsch. Ist jede stetige Abbildung $f : X \to Y$ abgeschlossen?

$\boxed{X}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Beweis: Sei $A \subset X$ abgeschlossen.
Da X kompakt ist, ist A kompakt (2D).
Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (3F).
Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (2C).

3H. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ zusammenhängende Teilräume, $n \geq 1$.
Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

$\boxed{}$ Ja $\boxed{X}$ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

Gegenbeispiel: Die Räume $X = \{ e^{it} \in \mathbb{S}^1 \mid 0 \leq t < \pi \}$ und $Y = \mathbb{S}^1$ sind zusammenhängend.
Die Abbildung $f : X \to Y : z \mapsto z^2$ ist stetig und bijektiv, aber kein Homöomorphismus.
Bemerkung: Der Zusammenhang von Y folgt aus dem von X.

3I. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ abgeschlossen. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

$\boxed{X}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

Der Raum X ist kompakt und Y ist hausdorffsch.
Dank (3G) ist f abgeschlossen, also ein Homöomorphismus.
Bemerkung: Die Kompaktheit von Y folgt aus der von X dank (3G).

3J. Seien $X, Y \subset \mathbb{S}^n$ offen. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus?

$\boxed{X}$ Ja $\boxed{}$ Nein. Begründung oder Gegenbeispiel:

Dank Invarianz des Gebietes ist f offen, also ein Homöomorphismus.
Bemerkung: Offenheit ist eine lokale Eigenschaft, wir können f daher in lokalen Karten ($\cong \mathbb{R}^n$) betrachten. Die Offenheit von Y folgt aus der von X dank Invarianz des Gebietes.

Aufgabe 4. *Quotienten und Flächen (2+2+3+3 = 10 Punkte)*

Wir erinnern an die Flächen $F_g^+ \cong \mathbb{D}^2/\langle a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \cdots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$ und $F_g^- \cong \mathbb{D}^2/\langle c_0 c_0 \cdots c_g c_g \rangle$. Wir teilen die Kreislinie $\mathbb{S}^1 = \partial\mathbb{D}^2$ in n Kreisbögen $\gamma_k : [0,1] \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto \exp[2\pi\mathrm{i}(k-1+t)/n]$ für $k = 1, 2, \dots, n$. Sei $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in A^n$ ein Wort über dem Alphabet $A = \{a^{\pm 1}, b^{\pm 1}, c^{\pm 1}, \dots\}$; bei $w_k = w_\ell$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(t)$ für jedes $t \in [0,1]$; bei $w_k = w_\ell^{-1}$ identifizieren wir $\gamma_k(t) \sim \gamma_\ell(1-t)$ für jedes $t \in [0,1]$. Sei $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle := \mathbb{D}^2/_\sim$ der Quotientenraum.

4A. Ist $\mathbb{D}^2/\langle\, aaa \,\rangle$ eine geschlossene Fläche? Wenn ja, welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Entlang der Kante a stoßen drei Halbebenen zusammen, das ist nicht lokal euklidisch, gemäß Jordanschem Kurvensatz, also keine Fläche. (Zusammenfassend genügt der entsprechende Satz der Vorlesung: Jeder Buchstabe darf in dem Wort w höchstens zweimal vorkommen.)

4B. Ist $\mathbb{D}^2/\langle\, aba^{-1} \,\rangle$ eine geschlossene Fläche? Wenn ja, welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Der Quotientenraum $\mathbb{D}^2/\langle\, aba^{-1} \,\rangle \cong \mathbb{D}^2/\langle\, b \,\rangle \cong \mathbb{D}^2$ ist eine kompakte Fläche, aber mit Rand. (Zusammenfassend genügt der entsprechende Satz der Vorlesung: Genau dann ist $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ eine geschlossene Fläche, wenn jeder Buchstabe im Wort w genau zweimal auftritt.)

4C. Ist $\mathbb{D}^2/\langle abdccbda\rangle$ eine geschlossene Fläche? Wenn ja, welche unter den Modellflächen $F_g^\pm$?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Ja, denn $\mathbb{D}^2/\langle\, abdccbda \,\rangle \cong \mathbb{D}^2/\langle\, aabbccd^{-1}d \,\rangle \cong \mathbb{D}^2/\langle\, aabbcc \,\rangle \cong F_2^-$.

Erinnerung: Der Flächenkalkül beweist den Klassifikationssatz durch Schneiden und Kleben. Er nützt auch in Beispielen wie diesen zur effizienten Erkennung der vorliegenden Fläche.

4D. Sei $n \in \mathbb{N}_{\ge 1}$. Auf der Kreisscheibe $\mathbb{D}^2 \subset \mathbb{C}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $u \approx v$ durch $u = v$ oder $(u, v \in \mathbb{S}^1$ und $u^n = v^n)$. Beschreiben Sie $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ durch ein Wort w.

Die Konstruktion entspricht unmittelbar $\mathbb{D}^2/_\approx = \mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$ mit $w = aa\cdots a$ (mit n Faktoren). *Erinnerung:* Durch $z \mapsto z^n$ wird die Kreislinie n mal um sich selbst gewickelt.

Präsentieren Sie $\pi_1(\mathbb{D}^2/_\approx, [1]) = \langle\, S \mid R \,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.

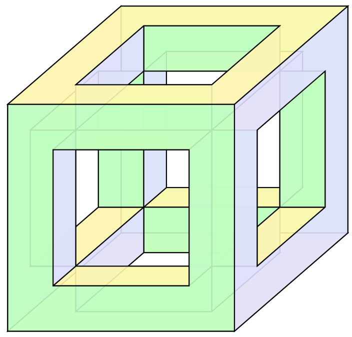
Es gilt $\pi_1(\mathbb{D}^2/_\approx, [1]) = \langle\, a \mid a^n \,\rangle \cong \mathbb{Z}/n$, analog zu den Flächen $F_g^\pm$ wie in der Vorlesung. Der dort erklärte Beweis gilt wörtlich genauso für alle Räume $\mathbb{D}^2/\langle\, w \,\rangle$.

Aufgabe 5. *Flächen und Quotienten (2+2+2+2 = 8 Punkte)*

Sei $(a,b,c,d) = (-1, -1/2, 1/2, 1)$. Im Raum $\mathbb{R}^3$ betrachten wir folgendes Polyeder:

$$K = [a,d]^3 \smallsetminus \Big(\big([a,d] \times]b,c[\times]b,c[\big) \cup \big(]b,c[\times [a,d] \times]b,c[\big) \cup \big(]b,c[\times]b,c[\times [a,d]\big) \Big)$$

Wir erhalten einen Henkelkörper wie rechts skizziert.



5A. Das Polyeder K enthält einen Graphen $G \subset K$ als starken Homotopie-Retrakt. Geben Sie einen solchen Graphen an und folgern Sie die Euler–Charakteristik $\chi(K)$.

Der Raum K ist homotopie-äquivalent zum 1–Skelett G des Würfels $[-1,1]^n$. (Skizze!)

Dieser Graph G besteht aus 8 Ecken und 12 Kanten, also $\chi(K) = \chi(G) = 8 - 12 = -4$.

Erinnerung: Für jeden Graphen G ist die Berechnung von $\chi(G)$ besonders leicht. Man kann $\chi(K)$ direkt berechnen, es ist jedoch effizienter, die Homotopie-Äquivalenz $K \simeq G$ zu nutzen. Glücklicherweise ist die Euler–Charakteristik homotopie-invariant!

5B. Der Rand $F = \partial K$ ist eine geschlossene Fläche: welche unter den Modellflächen $F_g^{\pm}$? Folgern Sie die Euler–Charakteristik $\chi(F)$.

Es gilt $F \cong F_5^+$. Für Geschlecht $g = 5$ folgt $\chi(F_g^+) = 2 - 2g = -8$.
Erinnerung: Henkel können wir zählen, indem wir in G einen Spannbaum wählen; die verbleibenden fünf Kanten entsprechen Henkeln. Alternativ können wir den Graphen G von oben betrachten und so in der Ebene zeichnen; das hilft erfahrungsgemäß der Anschauung.

5C. Die Rotation $\rho : (x,y,z) \mapsto (-x,-y,z)$ um die z–Achse bildet F auf sich selbst ab. Bestimmen Sie den Quotienten $F/\langle\, \rho\, \rangle$, also F modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$, als Fläche $F_{g,r}^{\pm}$.

Wir finden $F/\langle\rho\rangle \cong F_3^+ = F_{3,0}^+$. *Erinnerung:* Man kann Orientierbarkeit, Euler–Charakteristik und Randkomponenten bestimmen und den Klassifikationssatz anwenden. Etwas leichter gelingt es wohl mit Anschauung: in zwei Hälften schneiden und Ränder verkleben!

5D. Die Spiegelung $\sigma : (x,y,z) \mapsto (-x,y,z)$ an der y–z–Ebene bildet F auf sich selbst ab. Bestimmen Sie den Quotienten $F/\langle\, \sigma\, \rangle$, also F modulo $(x,y,z) \sim (-x,y,z)$, als Fläche $F_{g,r}^{\pm}$.

Wir finden $F/\langle\, \sigma\, \rangle \cong F_{1,4}^+$, ein Torus mit vier Löchern. *Erinnerung:* Man kann Orientierbarkeit, Euler–Charakteristik und Randkomponenten bestimmen und den Klassifikationssatz anwenden. Etwas leichter gelingt es wohl mit Anschauung: in zwei Hälften schneiden!

Aufgabe 6. *Klassische Gruppen* (*2+3+3+1 + 2+2 + 2+2+2+2+2 = 23 Punkte*)

6A. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{SL}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det A = 1 \}$ kompakt?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Für $a \in \mathbb{R}_{>0}$ gilt $\operatorname{diag}(a, a^{-1}, 1, \dots, 1) \in \mathrm{SL}_n \mathbb{R}$, also ist $\mathrm{SL}_n \mathbb{R}$ nicht beschränkt, und nach Heine–Borel (2B) nicht kompakt. (Im Fall $n = 1$ ist $\mathrm{SL}_1 \mathbb{R} = \{1\}$ eine Ausnahme.)

6B. Sei $n \geq 2$. Ist $\mathrm{SO}_n \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A^\intercal A = 1_{n\times n},\ \det A = 1 \}$ kompakt?

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die Abbildungen $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} : A \mapsto A^\intercal A$ und $\det : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ sind stetig, somit ist die Teilmenge $\mathrm{SO}_n \mathbb{R} = f^{-1}(\{1_{n\times n}\}) \cap \det^{-1}(\{1\})$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Zudem ist $\mathrm{SO}_n \mathbb{R}$ beschränkt: Für $A \in \mathrm{SO}_n \mathbb{R}$ gilt $|A|^2 = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 = n$ bezüglich der euklidischen Norm auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Dank Heine–Borel (2A) ist $\mathrm{SO}_n \mathbb{R}$ kompakt.

6C. Gibt es in $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ eine kompakte Untergruppe K, sodass die Inklusion $K \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ ein starker Deformationsretrakt ist? Nennen Sie ein Hindernis oder K mit Beweisidee.

☒ Ja ☐ Nein. Begründung:

Die orthogonale Gruppe $K = \mathrm{O}_n \mathbb{R}$ erfüllt die Forderung: Sie ist kompakt (wie in 6B) und das Gram–Schmidt–Verfahren liefert eine starke Retraktionsdeformation. Siehe Übung!

Erinnerung: In der Übung haben Sie die Zerlegung $h : \mathrm{O}_n \times \mathrm{B}_n^+ \xrightarrow{\sim} \mathrm{GL}_n \mathbb{R} : (Q, R) \mapsto QR$ als Homöomorphismus nachgewiesen, Gram-Schmidt liefert explizit die inverse Abbildung, und es gilt $\mathrm{B}_n^+ \simeq \{1\}$. Das ist schön und nützlich: Statt $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ genügt uns oft $\mathrm{O}_n \mathbb{R}$.

6D. Nennen Sie die Zerlegung $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R})$.

Es gilt $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R}) = \{ \mathrm{GL}_n^+ \mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^- \mathbb{R} \}$ mit $\mathrm{GL}_n^\pm \mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid A \gtrless 0 \}$.

Erinnerung: Die Ausführung besteht aus zwei Teilen. Dass $\pi_0(\mathrm{GL}_n \mathbb{R})$ *mindestens* zwei Komponenten hat, sehen wir an der Determinante $\det : \mathrm{GL}_n \mathbb{R} \twoheadrightarrow \mathbb{R}^\times$. Dass es *höchstens* zwei Komponenten gibt, sehen wir mit dem Gauß–Algorithmus und positiven Elementarmatrizen.

6E. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) = \langle\, S \mid R \,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.

Es gilt $\pi_1(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) = \pi_1(\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R}, 1) = \langle\, a \mid - \,\rangle \cong \mathbb{Z}$.

Erinnerung: Für die Fundamentalgruppe genügt es offensichtlich, statt der gesamten Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}$ nur die Wegkomponente $\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$ des Fußpunktes 1 zu betrachten. Wir nutzen $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$ wie in Vorlesung und Übung erklärt.

Realisieren Sie jeden Erzeuger explizit durch eine Schleife $\alpha : ([0,1], \{0,1\}) \to (\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1)$.

Eine volle Drehung wie $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) \end{pmatrix}$.

Erinnerung: Die Homotopieklasse $a = [\alpha]$ ist ein freier Erzeuger der Fundamentalgruppe; dies ist klar in $\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \cong \mathbb{S}^1$, und gilt somit auch in $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$. Sie kennen diese einfache, explizite Parametrisierung aus Vorlesung und Übung.

6F. Präsentieren Sie $\pi_1(\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1) = \langle\, S \mid R \,\rangle$ durch Erzeuger und Relationen.

Es gilt $\pi_1(\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1) = \pi_1(\mathrm{GL}_3^+\,\mathbb{R}, 1) = \langle\, b \mid b^2 \,\rangle \cong \mathbb{Z}/2$.

Erinnerung: Wir nutzen $\mathrm{GL}_3^+\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ wie in Vorlesung und Übung erklärt. Der Homöomorphismus $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \cong \mathbb{RP}^3$ ist sehr hilfreich aber keineswegs offensichtlich!

Wie zuvor gilt: Für die Fundamentalgruppe genügt es offensichtlich, statt der gesamten Gruppe $\mathrm{GL}_n\,\mathbb{R} = \mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R} \sqcup \mathrm{GL}_n^-\,\mathbb{R}$ nur die Wegkomponente $\mathrm{GL}_n^+\,\mathbb{R}$ des Fußpunktes 1 zu betrachten.

Realisieren Sie jeden Erzeuger explizit durch eine Schleife $\beta : ([0,1], \{0,1\}) \to (\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1)$.

Eine volle Drehung wie $\beta(t) = \begin{pmatrix} \cos(2\pi t) & -\sin(2\pi t) & 0 \\ \sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Erinnerung: Sie kennen diese einfache, explizite Parametrisierung aus Vorlesung und Übung. Der Weg β in $\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \subset \mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}$ ist nicht zusammenziehbar, aber seine zweifache Durchlaufung $\beta * \beta$ ist es! Das ist das Phänomen des *Spin* wie in der Vorlesung erklärt und vorgeturnt.

6G. Wir untersuchen $r : \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R} \to X := \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} : A \mapsto Ae_1$. Ist r eine Retraktion?
Nennen Sie eine stetige Abbildung $i : X \to \mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_X$ oder ein Hindernis.

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Die Abbildung $i : X \to \mathbb{R}^{2\times 2} : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ist stetig,

sie erfüllt $\det(i(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})) = a^2 + b^2 \neq 0$ und $r(i(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})) = (\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix})$.

Ist $\pi_1(r) : \pi_1(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) \to \pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, e_1)$ ein Gruppenisomorphismus?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

Wir wissen $\pi_1(\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}, e_1) = \langle\, c \mid - \,\rangle$ mit $c = [\gamma]$ und $\gamma(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$.
Die Abbildung r induziert $\pi_1(r) : \langle\, a \mid - \,\rangle \to \langle\, c \mid - \,\rangle : a \mapsto c$, denn $r \circ \alpha = \gamma$.

Bemerkung: Genauer kann man zeigen, dass $r : \mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\}$ eine Homotopie-Äquivalenz ist, denn $\mathrm{GL}_2^+\,\mathbb{R} \simeq \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \{0\} \simeq \mathbb{S}^1$ sowie $r : \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1$.

6H. Ist die Inklusion $i : (\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) \hookrightarrow (\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1) : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Homotopie-Äquivalenz?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Die Fundamentalgruppen (6E) und (6F) sind nicht isomorph.

Erinnerung: Jede Homotopie-Äquivalenz $i : (\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) \to (\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1)$ induziert einen Isomorphismus $\pi_1(i) : \pi_1(\mathrm{GL}_2\,\mathbb{R}, 1) \xrightarrow{\sim} \pi_1(\mathrm{GL}_3\,\mathbb{R}, 1)$. Das ist hier unmöglich, denn $\mathbb{Z} \not\cong \mathbb{Z}/2$.

6I. Ist der Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2 : 1 \mapsto \bar{1}$ in $\mathtt{Grp}$ ein Retrakt?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Es gibt nur einen Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$, nämlich den trivialen mit $\bar{1} \mapsto 0$.
Für diesen gilt $\varphi \circ \psi = 0$, also $\varphi \circ \psi \neq \mathrm{id}$. Somit ist φ in $\mathtt{Grp}$ kein Retrakt (anders als in $\mathtt{Set}$).

Bemerkung: In $\mathbb{Z}/2$ gilt $\bar{1} + \bar{1} = 0$. Jeder Gruppenhomomorphismus $\psi : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$ wird durch $x = \psi(\bar{1})$ festgelegt und muss $x + x = 0$ erfüllen. In $\mathbb{Z}$ existiert hierzu nur die Lösung $x = 0$.

6J. Ist die Inklusion $i : (\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}, 1) \hookrightarrow (\mathrm{SO}_3\,\mathbb{R}, 1) : A \mapsto \left(\begin{smallmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ in $\mathtt{Top}$ ein Retrakt?
Nennen Sie eine stetige Abbildung $r : \mathrm{SO}_3\,\mathbb{R} \to \mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}$ mit $r \circ i = \mathrm{id}_{\mathrm{SO}_2\,\mathbb{R}}$ oder ein Hindernis.

[ ] Ja [X] Nein. Begründung:

Jede solche Retraktion r zu i in $\mathtt{Top}$ induziert in $\mathtt{Grp}$ eine Retraktion $\pi_1(r)$ zu $\pi_1(i)$,
also äquivalent hierzu eine Retraktion $\psi : \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}$ zu $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/2$. Das ist unmöglich (6I).

Bemerkung: Wir sehen hier eine weitere Ilustration zum Nutzen algebraischer Strukturen!

Aufgabe 7. *Sphären und projektive Räume (2+2+3 = 7 Punkte)*

7A. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] = \mathscr{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3)/\text{Homotopie}$?

Antwort und Beweisidee:

Es gilt $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] = \{*\}$ dank simplizialer Approximation.

Erinnerung: Gegeben sei eine stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3$. Wir ersetzen f homöomorph durch $g : \partial\Delta^3 \to \partial\Delta^4$ und approximieren simplizial durch $|\varphi| : |K| \to \partial\Delta^4$. Aus Dimensionsgründen trifft $|\varphi|$ nicht das Innere eines 3–Simplex, und ist somit zusammenziehbar.

7B. Wie viele Elemente enthält $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2] = \mathscr{C}(\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2)/\text{Homotopie}$?

Antwort und Beweisidee:

Der Abbildungsgrad stiftet die Bijektion $\deg : [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Erinnerung: Die Umlaufzahl $\deg : [\mathbb{S}^1, \mathbb{S}^1] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ haben wir in der Vorlesung ausgeführt. Den Abbildungsgrad $\deg : [\mathbb{S}^n, \mathbb{S}^n] \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$ haben wir axiomatisch beschrieben und seine Existenz postuliert; die Konstruktion folgt in der Algebraischen Topologie.

Wir betrachten die komplex-projektive Gerade und $h : \mathbb{CP}^1 := (\mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\})/(\mathbb{C} \smallsetminus \{0\}) \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$ wie in der Vorlesung. Die Inklusion $j : \mathbb{S}^3 \hookrightarrow \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\}$ und der Quotient $q : \mathbb{C}^2 \smallsetminus \{0\} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1$ definieren die berühmte Hopf–Faserung $p := h \circ q \circ j : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$, kurz $\mathbb{S}^3/\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^2$.

7C. Ist $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ eine Retraktion?
Nennen Sie eine stetige Abbildung $i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3$ mit $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^2}$ oder ein Hindernis.

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

Jede stetige Abbildung $i : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^3$ ist zusammenziehbar (7A).
Gälte $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^2} = p \circ i$, so wäre auch $\mathrm{id}_{\mathbb{S}^2}$ zusammenziehbar, was (7B) widerspricht.

Alternativ: Wir nutzen den Funktor $[\mathbb{S}^2, -]$ wie im folgenden Diagramm. Wäre $p \circ i = \mathrm{id}_{\mathbb{S}_2}$, so wäre die Komposition von $i_* : [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2] \to [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3]$ und $p_* : [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^3] \to [\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2]$ äquivalent zur Komposition $\mathbb{Z} \to 0 \to \mathbb{Z}$, und somit nicht gleich der Identität $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$.

Bemerkung: Das Argument gelingt für jede stetige Abbildung $p : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$. Die Vorrede ist somit streng genommen entbehrlich, doch die Hopf–Faserung ist das wichtigste Beispiel.

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{S}^3 \arrow[dr, "p"] & \\ \mathbb{S}^2 \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "\mathrm{id}=p\circ i"'] & & \mathbb{S}^2 \end{tikzcd} \quad \overset{[\mathbb{S}^2,-]}{\Longrightarrow} \quad \begin{tikzcd} & {[\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^3] \cong \{*\}} \arrow[dr, "p_*"] & \\ \mathbb{Z} \cong [\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2] \arrow[ur, "i_*"] \arrow[rr, "\mathrm{id}_*=p_*\circ i_*"'] & & {[\mathbb{S}^2,\mathbb{S}^2] \cong \mathbb{Z}} \end{tikzcd}$$