

Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/13	/10	/12	/13	/14	/75

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 3. *Differentialgleichungssysteme* ($4+4+1+4 = 13$ Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ -1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in \mathbb{R}^3 . Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

$Av_1 =$,	$Av_2 =$
$Av_3 =$,	$B =$

4

3B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ von $y'(t) = Ay(t)$ mit $y_k(0) = v_k$.

$y_1(t) =$	
$y_2(t) =$	
$y_3(t) =$	

Wie lautet demnach die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ des DGSsystems $y'(t) = Ay(t)$?

$y(t) =$	
----------	--

4

3C. Welches asymptotische Verhalten hat die allgemeine Lösung $y(t)$ für $t \rightarrow \infty$?

1

3D. Lösen Sie das inhomogene DGSytem $u'(t) = A u(t) + e^{-t}v_3$ mit $u(0) = v_2 + v_3$ durch den Ansatz $u(t) = u_1(t)v_1 + u_2(t)v_2 + u_3(t)v_3$ mit $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Einsetzen und Koeffizientenvergleich führt zu folgendem DGSytem:

$$u_1'(t) = \boxed{}, \quad u_1(0) = 0$$

$$u_2'(t) = \boxed{}, \quad u_2(0) = 1$$

$$u_3'(t) = \boxed{}, \quad u_3(0) = 1$$

Bestimmen Sie die Funktion u_3 . (Hier gilt zufällig $u_2 = u_3$. Die Lösung $u_1(t) = 0$ ist klar.)

$$u_3(t) = \boxed{}$$

4

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen* (2+2+2+4 = 10 Punkte)**4A.** Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$.Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung:

$$p(x) =$$

Folgern sie hieraus die allgemeine Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) =$$

2**4B.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 4te^t$.

Ansatz:

$$y(t) =$$

Lösung:

$$y(t) =$$

2**4C.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{it}$.

$$y(t) =$$

Leiten Sie daraus eine Partikulärlösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \cos(t)$ ab.

$$y(t) =$$

2

4D. Nennen Sie die allgemeine Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = -4te^t + 2\cos(t)$:

$$y(t) =$$

$$y'(t) =$$

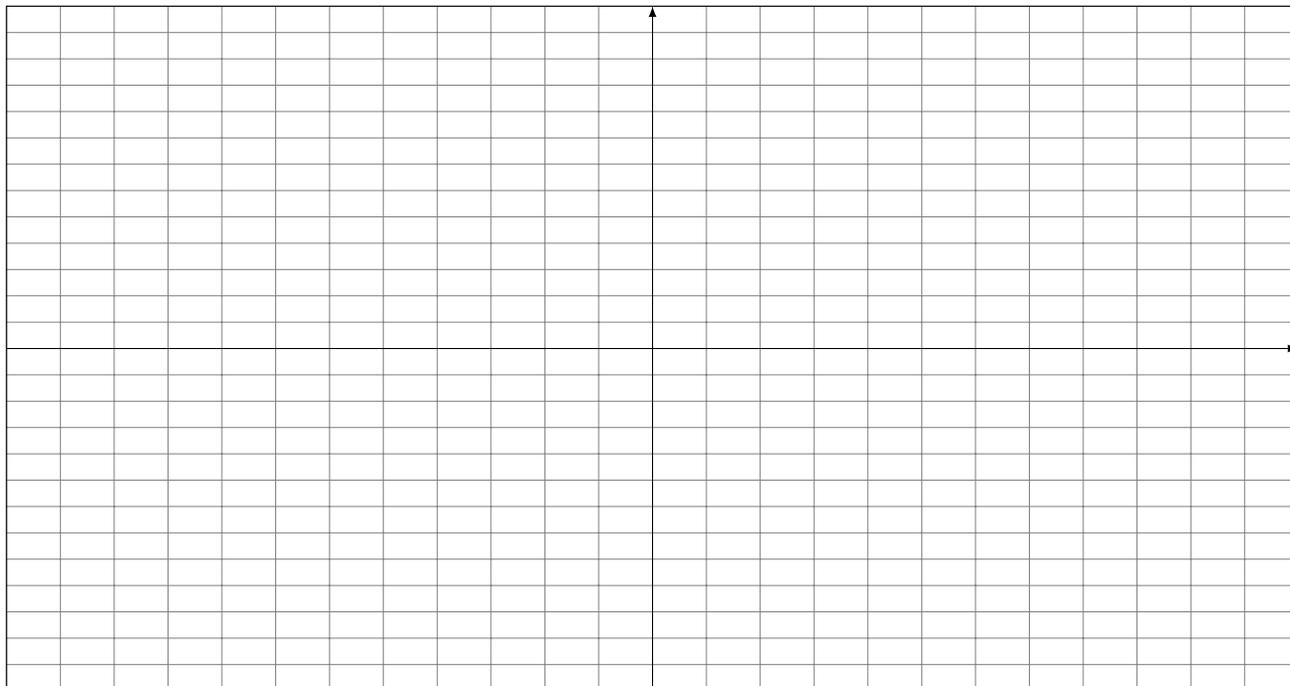
Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $y(0) = 2$ und $y'(0) = 0$:

$$y(t) =$$

Aufgabe 6. *Fourier-Reihen* (1+2+3+1+3+3 = 13 Punkte)

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei 2π -periodisch mit $f(x) = e^{3x}$ für $-\pi \leq x < \pi$.

6A. Es gilt $e^{3\pi} \approx 12\,391$. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



1

6B. Finden Sie den Grenzwert der Fourier-Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx}$ in $x = 0$ und $x = \pi$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0) =$

,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\pi) =$

2

6C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier-Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$:



3

6D. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$$a_k = \frac{(-1)^k 3}{\pi(9+k^2)} (e^{3\pi} - e^{-3\pi}) \quad \text{und} \quad b_k =$$

 1

6E. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{9+k^2} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \frac{1}{18} + \frac{1}{25} - \frac{1}{34} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x =$ ergibt:

 3

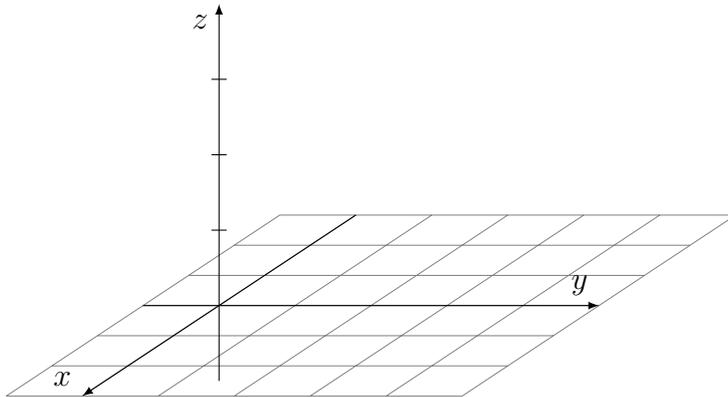
6F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier-Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9+k^2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{13} + \frac{1}{18} + \frac{1}{25} + \frac{1}{34} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x =$ ergibt:

 3

Aufgabe 7. *Dreidimensionale Körper und der Satz von Gauß* (3+3+3+3+2 = 14 Punkte)

7A. Skizzieren und parametrisieren Sie den Halbzylinder

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \leq 4, z \geq 0, 0 \leq y \leq 4 \}.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \varphi \\ y \\ \rho \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\boxed{} \leq \rho \leq \boxed{}$$

$$\boxed{} \leq \varphi \leq \boxed{}$$

$$0 \leq y \leq 4$$

3

7B. Berechnen Sie auf K die Quellstärke des Vektorfeldes $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7z + y^3 - 4xz^2 \\ e^{-x^2/2} \cdot e^{-z^2/2} \\ 4x - z - \pi y - 4x^2z \end{pmatrix}.$$

$$I_K := \int_K \operatorname{div} f(x, y, z) \, d(x, y, z) =$$

3

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.