Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/12	/12	/14	/13	/10	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Gilt für Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ stets $\mathbf{E}(X - Y) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y)$?

Begründete Antwort:

Ja. Der Erwartungswert ist linear (wie Summe und Integral allgemein).

Erläuterung: Der Erwartungswert $\mathbf{E}(X) = \int X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}$ ist ein Integral bzw. im diskreten Fall eine Summe. Daher gilt allgemein die Linearität $\mathbf{E}(aX + bY) = a\mathbf{E}(X) + b\mathbf{E}(Y)$ für $a, b \in \mathbb{R}$. Wir nehmen wie immer stillschweigend an, dass der Erwartungswert existiert, $\mathbf{E}(|X|) < \infty$, sodass wir $\mathbf{E}(X) = \int X(\omega)\,\mathrm{d}\mathbf{P}$ als absolut konvergentes Integral definieren können. (Andernfalls, für $X = Y$ nicht integrierbar, wäre die linke Seite definiert aber nicht die rechte Seite.) Multiplikativität $\mathbf{E}(X \cdot Y) = \mathbf{E}(X) \cdot \mathbf{E}(Y)$ hingegen gilt im Allgemeinen nicht, wie einfache Gegenbeispiele zeigen, sie gilt jedoch für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X, Y!

2

2B. Gilt für Zufallsvariablen $X, Y : (\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P}) \to \mathbb{R}$ stets $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$?

Begründete Antwort:

Nein. Für $X = Y$ mit $\mathbf{V}(X) > 0$ gilt $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(2X) = 4\mathbf{V}(X) \neq 2\mathbf{V}(X)$.

Erläuterung: Die Varianz $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big[(X - \mathbf{E}(X))^2\big]$ ist quadratisch, also $\mathbf{V}(aX) = a^2\mathbf{V}(X)$. Im Gegensatz zur Erwartung ist die Varianz keineswegs $\mathbb{R}$–linear, ja nicht einmal additiv!

Für *unabhängige* Zufallsvariablen jedoch gilt $\mathbf{V}(X + Y) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$: Nach Zentrierung $\mathbf{E}[X] = \mathbf{E}[Y] = 0$ gilt $\mathbf{V}[X+Y] = \mathbf{E}[(X+Y)^2] = \mathbf{E}[X^2] + 2\mathbf{E}[X]\mathbf{E}[Y] + \mathbf{E}[Y^2] = \mathbf{V}[X] + \mathbf{V}[Y]$. Das ist die Grundlage des Gesetzes der großen Zahlen. Allein aus diesem Grund lohnt es sich, Experimente und Messungen unabhängig zu wiederholen, um die Genauigkeit zu verbessern!

2

2C. Wenn die Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ einen doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ hat, dann existiert eine Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} u \xleftarrow{A-\lambda} v$ der Länge 2. Stimmt das immer?

Begründete Antwort:

Nein. Gegenbeispiel ist die Diagonalmatrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Das charakteristische Polynom ist $P_A(x) = \det(A - xE) = (x - \lambda)^2$. Es gibt zwei linear unabhängige Eigenvektoren, die kanonische Wahl sind e_1, e_2. Beide sind Eigenvektoren, also Hauptvektoren erster Stufe, aber A hat keine Hauptvektoren höherer Stufe, da $A - \lambda = 0$. Allgemein wissen Sie aus der HM1: Genau dann ist $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ diagonalisierbar wenn es eine Basis aus Eigenvektoren gibt, d.h. Hauptvektoren höherer Stufe treten dann nicht auf. Wenn mehrfache Eigenwerte vorliegen, dann *können* Hauptvektoren höherer Stufe auftreten, *müssen* aber nicht. Ein solches Beispiel $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ begegnet Ihnen in Aufgabe 6 dieser Klausur.

2

2D. Wenn zur Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine Hauptvektorkette $0 \xleftarrow{A-\lambda} u \xleftarrow{A-\lambda} v$ der Länge 2 existiert, dann hat A den doppelten Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$. Stimmt das immer?

Begründete Antwort:

Ja. Dank der gegebenen Jordan–Basis $\mathscr{B} = (u, v)$ gilt $A \sim B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Gegeben ist der Hauptvektor v zweiter Stufe. Das heißt, $u = (A - \lambda)v$ ist nicht null, erst $(A-\lambda)u = 0$ verschwindet. Wir erhalten so eine Basis (u, v) des Vektorraumes $\mathbb{C}^2$, wie man leicht nachrechnet: Vektoren einer Hauptvektorkette sind linear unabhängig. In dieser Basis wird A dargestellt durch den obigen Jordan–Block B. Also ist das charakteristische Polynom $P_A(x) = P_B(x) = \det(B - xE) = (x - \lambda)^2$. Dieses hat die doppelte Nullstelle λ. Erinnerung an die HM1: Ist $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ nicht-diagonalisierbar, so hat A nur einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ und für diesen gilt $1 \le$ geometrische Vielfachheit $<$ algebraische Vielfachheit ≤ 2.

2

2E. Eindeutigkeit 1: Gegeben sei eine Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit stetiger rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Können sich verschiedene Lösungsfunktionen $y \ne \tilde{y} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ schneiden?

Begründete Antwort:

Ja. Ein Gegenbeispiel aus der Vorlesung ist Torricellis Eimer $y'(x) = a\sqrt{y(x)}$.

Erläuterung: Die Stetigkeit von f allein genügt nicht, um die Eindeutigkeit von Lösungen zu gegebenen Anfangswerten zu garantieren: Der Eindeutigkeitssatz verlangt stetige Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ nach y. Warnende Gegenbeispiele kennen Sie aus der Vorlesung.

Zwei Lösungen $y, \tilde{y} : I \to \mathbb{R}$ können einen gemeinsamen Startpunkt $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = y_0$ haben und dennoch auf ihrem gemeinsamen Lösungsintervall I voneinander abweichen. Man nennt solche Probleme *schlecht gestellt* und versucht, sie zu erkennen und möglichst zu vermeiden.

2

2F. Eindeutigkeit 2: Die konstante Nullfunktion $\tilde{y}(x) = 0$ löst die Differentialgleichung $y'(x) = \sqrt{|x|} \sin y(x)$. Wie viele Nullstellen hat demnach jede andere Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Keine. Der Eindeutigkeitssatz schließt aus, dass sich die Lösungen y und $\tilde{y}$ schneiden.
Er ist hier anwendbar, da $f(x, y) = \sqrt{|x|} \sin y(x)$ stetig differenzierbar nach y ist!

Erläuterung: Zur *Existenz* von Lösungen genügt schon die Stetigkeit der rechten Seite $f(x, y)$, zur *Eindeutigkeit* benötigen wir definitiv mehr (2E). Cauchys Eindeutigkeitssatz gibt hierüber Auskunft: Es genügt, dass $f(x, y)$ stetig differenzierbar ist nach y. Anders als in Frage 2E ist diese Voraussetzung hier erfüllt. Demnach können sich verschiedene Lösungen nicht schneiden.

Anwendung auf unsere Gleichung: Hat eine Lösungsfunktion y eine Nullstelle $y(x_0) = 0$, so haben y und $\tilde{y}$ den gemeinsamen Startpunkt $y(x_0) = \tilde{y}(x_0) = 0$. Dank Eindeutigkeitssatz sind sie also gleich, $y = \tilde{y} = 0$. Kontraposition: Jede Lösung $y \ne 0$ hat keine einzige Nullstelle.
Solche wichtigen, qualitativen Aussagen können wir also auch schon ableiten, ohne die Lösung berechnen zu müssen! Oft kann oder will man sie auch gar nicht exakt berechnen, so wie hier.

2

Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit: Kombinatorik* (*2+2+2+3+3 = 12 Punkte*)

3A. Aus einer Schublade mit 3 blauen und 6 schwarzen Socken ziehen Sie zweimal zufällig ohne Zurücklegen. Welche Wkt hat das Ereignis $V = \{$Sie ziehen zwei verschiedenfarbige Socken$\}$?

$$\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(BS) + \mathbf{P}(SB) = \frac{3}{9}\cdot\frac{6}{8} + \frac{6}{9}\cdot\frac{3}{8} = \frac{36}{72} = \frac{1}{2} = 50\%$$

Erläuterung: Wir zerlegen V disjunkt und nutzen dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten. Alternativ kann man $\mathbf{P}(\overline{V}) = 1 - \mathbf{P}(V)$ berechnen durch $\mathbf{P}(BB) = 1/12$ und $\mathbf{P}(SS) = 5/12$. Seit der Schule nutzen Sie vermutlich die beliebten Baumdiagramme zur Veranschaulichung.

$\overline{}$ 2

3B. Aus den Losen $0, 1, 2, \dots, 9$ ziehen Sie viermal zufällig mit Zurücklegen. Berechnen Sie die Wkt $\mathbf{P}(A)$ des Ereignisses $A = \{$Sie ziehen vier verschiedene Zahlen$\}$. (Ergebnis in Prozent)

$$\mathbf{P}(A) = \frac{10}{10}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{7}{10} = \frac{504}{1000} = 50.4\%$$

Erläuterung: Von insgesamt 10 Möglichkeiten bleiben erst 10, dann 9, dann 8, dann 7. Für große Zahlen approximieren wir die Kollisionswahrscheinlichkeit in Aufgabe 3D.

$\overline{}$ 2

3C. Berechnen Sie die Wkt $\mathbf{P}(A|B)$ unter der Bedingung $B = \{$Sie ziehen nur gerade Zahlen$\}$. Hier sei A wie in 3B. (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.)

$$\mathbf{P}(A|B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}} = \frac{5}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{5} = \frac{24}{125} = \frac{192}{1000} = 19.2\% \approx 19\%$$

Erläuterung: Wir nutzen die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und berechnen die Wkten $\mathbf{P}(A \cap B)$ und $\mathbf{P}(B)$. Man erhält das Ergebnis aus 3B mit der Losmenge $0, 2, 4, 6, 8$. (Ja, auch die Null ist eine Zahl, und sie ist gerade: Sie lässt sich ohne Rest durch 2 teilen.)

$\overline{}$ 2

3D. Aus Losen $1, 2, 3, \dots, 500$ ziehen Sie 800mal zufällig mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit Q ziehen Sie niemals Ihre Glückszahl 202? (Ergebnis in Prozent, ebenso gerundet)

$$Q = \left(1 - \frac{1}{500}\right)^{800}$$

Die exakte Rechnung ergibt $Q = 0.201573\dots$.

$$\lessapprox \exp\left(-\frac{800}{500}\right) \approx 0.202 \approx 20\%$$

Wir nutzen $(1-x) \lessapprox \exp(-x)$ für $|x| \ll 1$.

Erläuterung: Sie kennen Rechnung und Näherung von Ausfallwahrscheinlichkeiten. Insbesondere die Taylor–Formel und die Näherung $(1-x) \lessapprox \exp(-x)$ sind oft nützlich. Dies spezialisiert Binomialvert. $B(800, 1/500)(k)$ bzw. Poisson–Vert. $P(\frac{800}{500})(k)$ für $k = 0$.

$\overline{}$ 3

3E. Aus Losen $1, 2, 3, \dots, 500$ ziehen Sie 40mal zufällig mit Zurücklegen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ziehen Sie 40 verschiedene Zahlen? (Ergebnis in Prozent, ebenso gerundet)

$$P = 1 \cdot \Big(1 - \frac{1}{500}\Big) \cdot \Big(1 - \frac{2}{500}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{39}{500}\Big)$$ Exakte Formel wie in 3B

$$\lessapprox \exp\Big(-\frac{40 \cdot 39}{2 \cdot 500}\Big) = \exp\Big(-\frac{1560}{1000}\Big) \approx 0.21 = 21\%$$ Taylor-Näherung wie in 3D

Erläuterung: Sie kennen Rechnung und Näherung vom Geburtstagsparadox oder allgemein Kollisionswahrscheinlichkeiten. Die exakte Rechnung ergibt hier $P = 0.201335\dots$. 3

Aufgabe 4. *Wahrscheinlichkeit: Grenzwertsätze* (*4+2+2+3+1 = 12 Punkte*)

Ein Atom Uran 238 zerfällt in der nächsten Stunde mit Wkt $p = 2 \cdot 10^{-14}$. Eine Probe von 20mg enthält etwa $n = 5 \cdot 10^{19}$ Atome. Wir nehmen die Zerfälle als stochastisch unabhängig an, insbesondere keine Kettenreaktion. Sei X die Gesamtzahl der Zerfälle in der nächsten Stunde.

4A. Nennen Sie die exakte Verteilung (in diesem vereinfachten Modell):

$$\mathbf{P}(X{=}k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$ Binomialverteilung $B(n,p)$

Bestimmen Sie hierzu Erwartungswert $\mu = \mathbf{E}(X)$ und Varianz $\sigma^2 = \mathbf{V}(X)$ und Streuung σ. Runden Sie das Ergebnis jeweils auf die nächstgelegene ganze Zahl.

$$\mu = \mathbf{E}(X) = np = 5 \cdot 10^{19} \cdot 2 \cdot 10^{-14} = 10^6$$ Erwartung zu $B(n,p)$

$$\sigma^2 = \mathbf{V}(X) = np(1-p) = 10^6 - 2 \cdot 10^{-8} \approx 10^6$$ Varianz zu $B(n,p)$

$$\sigma = \sqrt{\mathbf{V}(X)} = \sqrt{10^6 - 2 \cdot 10^{-8}} \approx \sqrt{10^6} \approx 10^3$$ Streuung zu $B(n,p)$ 4

4B. Wie klein ist der totale Abstand zur Poisson–Verteilung $P(\mu)$? Kleiner als 10^{-6}?

$$\big\|\mathbf{P}_X - P(\mu)\big\| \;\le\; np^2 \;=\; 5\cdot 10^{19}\cdot 4\cdot 10^{-28} \;=\; 2\cdot 10^{-8} \;<\; 10^{-6}$$

Erläuterung: Dies ist die Fehlerschranke zwischen Binomial $B(n,p)$ und Poisson $P(np)$. Sie ist extrem klein, wie die Aufgabenstellung erahnen ließ. Ausrechnen gibt Gewissheit! 2

4C. Wie klein ist der Approximationsfehler zur Normalverteilung $N(\mu,\sigma^2)$? Kleiner als 10^{-3}?

$$|\delta| \;\le\; \frac{|1-2p|}{10\sigma} + \frac{1}{3\sigma^2} \;<\; \frac{1}{6\sigma} \;<\; \frac{1}{\sigma} \;=\; 10^{-3}$$

Erläuterung: Dies sind die Fehlerschranken aus dem lokalen bzw. zentralen Grenzwertsatz. Die beste (links) ist $\approx 1/(10\sigma) \approx 10^{-4}$. Selbst die gröbste $< 1/\sigma \approx 10^{-3}$ genügt hier noch. 2

4D. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbf{P}\big(|X-\mu| \le 2500\big)$ durch eine geeignete Näherung. Gesucht ist das Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt.

$\mathbf{P}\big(\lvert X-\mu\rvert \le 2500\big)$	$\approx \int_{-\alpha}^{\alpha} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$	Näherung durch die Normalverteilung
$= 2\cdot \int_{t=0}^{2.5} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$	$\approx 2\cdot 0.49379$	Ablesen aus der Tabelle, siehe Seite 2
$= 0.98758$	$\approx 99\%$	Ausrechnen und runden

Erläuterung: Dank 4C genügt die Normalverteilung der geforderten Genauigkeit von 1%. Zur Auswertung des Integrals nutzen wir wie üblich die Tabelle der Normalverteilung, siehe Seite 2. (Es geht auch nicht anders: Die Funktion $\mathrm{e}^{-t^2/2}$ ist nicht elementar integrierbar.) Die Stetigkeitskorrektur $1/2$ in $\alpha = [(\mu+2500)-\mu+1/2]/\sigma$ ist korrekt aber hier unerheblich. Nach 4B ist die Poisson–Verteilung noch genauer, für diese liegt hier aber keine Tabelle vor. Chebychev $\mathbf{P}\big(|X-\mu| \le 2500\big) \ge 84\%$ ist nur eine Ungleichung und hier zudem viel zu grob. 3

4E. Würden Sie diese Rechnung ebenso durchführen bei spaltbarem Material, etwa Uran 235? (Hier *kann* eine Kettenreaktion entstehen, genutzt etwa als Kernreaktor oder als Kernwaffe.)

Begründete Antwort:

Nein!!! Die stochastische Unabhängigkeit der Zerfälle gilt dann nicht mehr!

Erläuterung: Ein größerer Wert $p \in [0,1]$ ist *nicht* das Problem. Es gibt nur einen wesentlichen Unterschied: Unser obiges Modell mit $B(n,p)$ beruht auf stochastischer *Unabhängigkeit*! Kernphysik gehört natürlich nicht zur HM3, aber soviel Anwendungsbezug gehört zur Allgemeinbildung für technisch Gebildete, insbesondere angehende Ingenieure. Ein qualitatives Modell kennen Sie vielleicht aus der Schule: Die Kettenreaktion entsteht, weil beim Zerfall Neutronen emitiert werden, die von anderen Atomkernen absorbiert werden und diese zum Zerfall anregen. Das ist das Gegenteil von Unabhängigkeit! 1

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen erster Ordnung (3+3+4+4 = 14 Punkte)*

5A. Bestimmen Sie die Funktion $u:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $u'(x) = -xu(x)$ und $\int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

$\dfrac{u'(x)}{u(x)} = -x$ Mögliches Lösungsverfahren: Trennung der Variablen

$\ln u(x) = c - x^2/2$ Integration über x, Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$

$u(x) = C\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ Auflösen nach u durch Anwendung von exp

$u(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-x^2/2}$ Bestimmung der Konstanten: $C = 1/\sqrt{2\pi}$

Erläuterung: Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die DG und Ableiten!
Die berühmte Konstante $C = 1/\sqrt{2\pi}$ kennen Sie von der Normalverteilung, siehe Seite 2.
Aus der Vorlesung wissen Sie zudem, wie man C mit dem Gaußschen Kunstgriff berechnet.
Alternative: Dies ist eine lineare Differentialgleichung $u'(x) = a(x)u(x)$ mit $a(x) = -x$.
Die Lösungsformel $u(x) = C\exp A(x)$ mit $A(x) = \int a(t)\,\mathrm{d}t$ liefert uns dieselbe Lösung.

3

5B. Bestimmen Sie die Funktion $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $y'(x) = x - xy(x)$ und $y(0) = 0$.

$\dfrac{y'(x)}{1-y(x)} = x$ Mögliches Lösungsverfahren: Trennung der Variablen

$-\ln\big(1-y(x)\big) = x^2/2 - c$ Integration über x, Integrationskonstante $c \in \mathbb{R}$

$y(x) = 1 - C\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ Auflösen nach y, wie zuvor in Frage 5A

$y(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2}$ Bestimmung der Konstanten: $C = 1$

Erläuterung: Machen Sie die Probe durch Einsetzen in die DG und Ableiten!

Alternative: Dies ist eine inhomogene lineare Differentialgleichung $y'(x) = a(x)y(x) + b(x)$ mit $a(x) = -x$ und $b(x) = x$. Die zugehörige Lösungsformel liefert ebenfalls die Lösung. Versuchen Sie es als Übung! Die Rechnung ist lehrreich und nicht viel länger.

3

5C. Lösen Sie für $x > 0$ die exakte Differentialgleichung $y(x) - \cos x + xy'(x) = 0$ mit $y(\pi) = 0$.

Bestimme $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\operatorname{grad}\Phi(x,y) = (y - \cos x, x)$ Potential dieser DG!

$\partial_x \Phi(x,y) \stackrel{!}{=} y - \cos x \implies \Phi(x,y) = xy - \sin(x) + c(y)$ Integration nach x

$\partial_y \Phi(x,y) \stackrel{!}{=} x \implies \Phi(x,y) = xy - \sin(x) + c$ Integration nach y

$\Phi(x,y) \stackrel{!}{=} \Phi(\pi, 0) \implies xy - \sin(x) = 0$ Niveaulinie durch $(\pi, 0)$

$y(x) = \sin(x)/x \implies$ Probe! Auflösung nach $y(x)$

Erläuterung: Wir wussten dank Aufgabenstellung, dass diese DG exakt ist. Andernfalls müssten wir erst $\operatorname{rot}(f,g) = 0$ testen und ggf. einen integrierenden Faktor finden wie in 5D. Auch $y' = x^{-1}\cos x - x^{-1}y$ ist linear inhomogen. Nutzen Sie die Lösungsformel als Übung!

4

5D. Bestimmen Sie einen integrierenden Faktor λ für $x^2 \cos x + y(x) - xy'(x) = 0$.

$f(x,y) = x^2 \cos x + y, \quad g(x,y) = -x$ Daten dieser DG

$\operatorname{rot}(f,g) = \partial_x g - \partial_y f = -1 - 1 = -2$ $\operatorname{rot}(f,g) \neq 0$, also nicht exakt

$$\frac{\lambda'(x)}{\lambda(x)} \stackrel{!}{=} -\frac{\operatorname{rot}(f,g)}{g} = -\frac{2}{x}$$ Lösbar da nur von x abhängig

$\ln \lambda(x) = -2 \ln x + c$ Integration nach x, Konstante $c \in \mathbb{R}$

$\lambda(x) = C\, x^{-2}$ Auflösen nach $\lambda(x)$, Konstante $C \neq 0$.

Erläuterung: Die Gleichung $\cos x + x^{-2}y(x) - x^{-1}y'(x) = 0$ ist exakt. Machen Sie die Probe! Man kann sie nun genauso lösen wie 5C. Versuchen Sie's als Übung! Lösung $y(x) = x \sin x$. Auch $y' = y/x + x\cos x$ ist linear inhomogen. Nutzen Sie die Lösungsformel als Übung!

4

Aufgabe 6. *Differentialgleichungssysteme* (*4+4+1+4 = 13 Punkte*)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -10 & 15 \\ 2 & -6 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

6A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^3$. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$.

$$Av_1 = \boxed{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_1, \qquad \text{Eigenvektor!}}, \qquad Av_2 = \boxed{\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \cdot v_2, \qquad \text{Eigenvektor!}}$$

$$Av_3 = \boxed{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot v_3, \qquad \text{Eigenvektor!}}, \qquad B = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \text{Diagonalmatrix!}}$$

4

6B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ von $y'(t) = A\,y(t)$ mit $y_k(0) = v_k$.

$$y_1(t) = \boxed{e^{-t} v_1 = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenfunktion!}}$$

$$y_2(t) = \boxed{e^{-t} v_2 = e^{-t} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenfunktion!}}$$

$$y_3(t) = \boxed{e^{0t} v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenfunktion!}}$$

Wie lautet demnach die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ des DGSystems $y'(t) = A\,y(t)$?

$$y(t) = \boxed{c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) = \begin{pmatrix} (1c_1 + 3c_2)e^{-t} \\ (2c_1 + 1c_2)e^{-t} + 3c_3 \\ c_1 e^{-t} + 2c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{Linearkombination!}}$$

4

6C. Welches asymptotische Verhalten hat die allgemeine Lösung $y(t)$ für $t \to \infty$?

Für $t \to \infty$ gilt Konvergenz $y(t) \to c_3 v_3$.

Erläuterung: Das asymptotische Verhalten von $y(t)$ für $t \to \infty$ entscheidet über die Stabilität bzw. Instabilität von Lösungen. Zum Beispiel kann eine Lösung abklingen, d.h. $|y(t)| \to 0$, oder explodieren, d.h. $|y(t)| \to \infty$. Hier jedoch ist jede Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, zu beliebigem Startwert $y(0) \in \mathbb{R}^3$, konvergent und somit insbesondere beschränkt.

1

6D. Lösen Sie das inhomogene DGSystem $u'(t) = A\,u(t) + \mathrm{e}^{-t} v_1$ mit $u(0) = 0$ durch den Ansatz $u(t) = u_1(t)v_1 + u_2(t)v_2 + u_3(t)v_3$ mit $u_1, u_2, u_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Einsetzen und Koeffizientenvergleich entkoppeln das DGSystem zu:

$u_1'(t) = \boxed{-u_1(t) + \mathrm{e}^{-t}}$ Koeffizientenvergleich! , $u_1(0) = 0$

$u_2'(t) = \boxed{-u_2(t)}$ Koeffizientenvergleich! , $u_2(0) = 0$

$u_3'(t) = \boxed{0}$ Koeffizientenvergleich! , $u_3(0) = 0$

Die Lösungen $u_2(t) = u_3(t) = 0$ sind dann klar. Bestimmen Sie die interessante Lösung u_1:

$u_1(t) = \boxed{t\,\mathrm{e}^{-t}}$ Partikulärlösung bei Resonanz!

4

Erläuterung: Ins DGS $u'(t) = A\,u(t) + \mathrm{e}^{-t} v_1$ setzen wir $u(t) = u_1(t)v_1 + u_2(t)v_2 + u_3(t)v_3$ ein:

$$\begin{aligned} u_1'(t)v_1 + u_2'(t)v_2 + u_3'(t)v_3 &= (-1)\cdot u_1(t)v_1 + (-1)\cdot u_2(t)v_2 + 0\cdot u_3(t)v_3 + \mathrm{e}^{-t}v_1 \\ \text{oder zusammengefasst:}\quad 0 &= \big[u_1'(t) + u_1(t) - \mathrm{e}^{-t}\big]v_1 + \big[u_2'(t) + u_2(t)\big]v_2 + \big[u_3'(t)\big]v_3 \end{aligned}$$

Drei Koeffizientenvergleiche liefern die obigen drei Gleichungen für u_1, u_2, u_3: Diese Gleichungen sind offensichtlich hinreichend, aber auch notwendig, da $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind. Für u_1 liegt Resonanz vor, hierfür kennen Sie die partikuläre Lösung $u_1(t) = t\,\mathrm{e}^{-t}$. Probe!

Alternative: Für inhomogene lineare DGSysteme $y'(t) = A\,y(t) + b(t)$ kennen Sie aus Vorlesung und Übung die Lösungsformel durch Variation der Konstanten. Der obige Ansatz in der Eigenbasis v_1, v_2, v_3 berechnet genau dasselbe, angepasst an die Daten und etwas vereinfacht.

Aufgabe 7. *Differentialgleichungen und Laplace–Transformation (4+6 = 10 Punkte)*

7A. Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung:

Ablesen und faktorisieren:

$p(x) =$ $x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$ Dreifache Nullstelle!

Die vorgegebene Variable heißt hier x, Antworten in λ haben streng wenig Sinn.

/2

Folgern sie hieraus die allgemeine Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

Einsetzen der Lösungsformel:

$y(t) =$ $\mathrm{e}^t(c_1 + c_2 t + c_3 t^2)$ mit $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ Fundamentallösungen!

Die vorgegebene Variable heißt hier t, Antworten in x haben streng wenig Sinn.

/2

7B. Lösen Sie durch Laplace–Transformation die inhomogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = 3 - t$ mit den Anfangswerten $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 0$.

Die Laplace–Transformation $y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, Y(s)$ übersetzt diese DG in folgende Hilfsgleichung:

Rechte Seite: $3 - t \circ\!\!-\!\!\bullet$ $\dfrac{3}{s} - \dfrac{1}{s^2}$ Dank $\mathscr{L}$–Tabelle und Linearität!

/1

Linke Seite: $p(\partial_t)\, y(t) \circ\!\!-\!\!\bullet$

Wir nutzen die Ableitungsregeln der $\mathscr{L}$–Transformation:

$\big[s^3 Y(s) - s\big] - 3\big[s^2 Y(s) - 1\big] + 3sY(s) - Y(s)$

$= p(s)Y(s) + 3 - s$

/2

Auflösen nach Y ergibt $Y(s) =$ $\dfrac{1}{p(s)}\left(s - 3 + \dfrac{3}{s} - \dfrac{1}{s^2}\right) = \dfrac{(s-1)^3}{s^2(s-1)^3} = \dfrac{1}{s^2}$

/2

Dank $\mathscr{L}$–Tabelle folgt (hier ohne PBZ, da schon gratis):

Rücktransformation zu $y(t) =$ t

Probe! Finden ist meist schwer, überprüfen hingegen leicht.

/1