# Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

**Aufgabe 1.** *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

| | |
|---|---|
| Name: | Matrikelnummer: |
| Vorname: | Studiengang: |

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

---

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | Gesamt |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | /1 | /12 | /11 | /13 | /11 | /12 | /14 | /74 |

## Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von $x$:

| $x$ | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 | 0.7 | 0.8 | 0.9 | 1.0 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 | 1.7 | 1.8 | 1.9 | 2.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $e^x$ | 1.11 | 1.22 | 1.35 | 1.49 | 1.65 | 1.82 | 2.01 | 2.23 | 2.46 | 2.72 | 3.00 | 3.32 | 3.67 | 4.06 | 4.48 | 4.95 | 5.47 | 6.05 | 6.69 | 7.39 |
| $e^{-x}$ | .905 | .819 | .741 | .670 | .607 | .549 | .497 | .449 | .407 | .368 | .333 | .301 | .273 | .247 | .223 | .202 | .183 | .165 | .150 | .135 |

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

| | $x$+0.00 | $x$+0.01 | $x$+0.02 | $x$+0.03 | $x$+0.04 | $x$+0.05 | $x$+0.06 | $x$+0.07 | $x$+0.08 | $x$+0.09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x = 0.0$ | 0.00000 | 0.00399 | 0.00798 | 0.01197 | 0.01595 | 0.01994 | 0.02392 | 0.02790 | 0.03188 | 0.03586 |
| 0.1 | 0.03983 | 0.04380 | 0.04776 | 0.05172 | 0.05567 | 0.05962 | 0.06356 | 0.06749 | 0.07142 | 0.07535 |
| 0.2 | 0.07926 | 0.08317 | 0.08706 | 0.09095 | 0.09483 | 0.09871 | 0.10257 | 0.10642 | 0.11026 | 0.11409 |
| 0.3 | 0.11791 | 0.12172 | 0.12552 | 0.12930 | 0.13307 | 0.13683 | 0.14058 | 0.14431 | 0.14803 | 0.15173 |
| 0.4 | 0.15542 | 0.15910 | 0.16276 | 0.16640 | 0.17003 | 0.17364 | 0.17724 | 0.18082 | 0.18439 | 0.18793 |
| 0.5 | 0.19146 | 0.19497 | 0.19847 | 0.20194 | 0.20540 | 0.20884 | 0.21226 | 0.21566 | 0.21904 | 0.22240 |
| 0.6 | 0.22575 | 0.22907 | 0.23237 | 0.23565 | 0.23891 | 0.24215 | 0.24537 | 0.24857 | 0.25175 | 0.25490 |
| 0.7 | 0.25804 | 0.26115 | 0.26424 | 0.26730 | 0.27035 | 0.27337 | 0.27637 | 0.27935 | 0.28230 | 0.28524 |
| 0.8 | 0.28814 | 0.29103 | 0.29389 | 0.29673 | 0.29955 | 0.30234 | 0.30511 | 0.30785 | 0.31057 | 0.31327 |
| 0.9 | 0.31594 | 0.31859 | 0.32121 | 0.32381 | 0.32639 | 0.32894 | 0.33147 | 0.33398 | 0.33646 | 0.33891 |
| 1.0 | 0.34134 | 0.34375 | 0.34614 | 0.34849 | 0.35083 | 0.35314 | 0.35543 | 0.35769 | 0.35993 | 0.36214 |
| 1.1 | 0.36433 | 0.36650 | 0.36864 | 0.37076 | 0.37286 | 0.37493 | 0.37698 | 0.37900 | 0.38100 | 0.38298 |
| 1.2 | 0.38493 | 0.38686 | 0.38877 | 0.39065 | 0.39251 | 0.39435 | 0.39617 | 0.39796 | 0.39973 | 0.40147 |
| 1.3 | 0.40320 | 0.40490 | 0.40658 | 0.40824 | 0.40988 | 0.41149 | 0.41308 | 0.41466 | 0.41621 | 0.41774 |
| 1.4 | 0.41924 | 0.42073 | 0.42220 | 0.42364 | 0.42507 | 0.42647 | 0.42785 | 0.42922 | 0.43056 | 0.43189 |
| 1.5 | 0.43319 | 0.43448 | 0.43574 | 0.43699 | 0.43822 | 0.43943 | 0.44062 | 0.44179 | 0.44295 | 0.44408 |
| 1.6 | 0.44520 | 0.44630 | 0.44738 | 0.44845 | 0.44950 | 0.45053 | 0.45154 | 0.45254 | 0.45352 | 0.45449 |
| 1.7 | 0.45543 | 0.45637 | 0.45728 | 0.45818 | 0.45907 | 0.45994 | 0.46080 | 0.46164 | 0.46246 | 0.46327 |
| 1.8 | 0.46407 | 0.46485 | 0.46562 | 0.46638 | 0.46712 | 0.46784 | 0.46856 | 0.46926 | 0.46995 | 0.47062 |
| 1.9 | 0.47128 | 0.47193 | 0.47257 | 0.47320 | 0.47381 | 0.47441 | 0.47500 | 0.47558 | 0.47615 | 0.47670 |
| 2.0 | 0.47725 | 0.47778 | 0.47831 | 0.47882 | 0.47932 | 0.47982 | 0.48030 | 0.48077 | 0.48124 | 0.48169 |
| 2.1 | 0.48214 | 0.48257 | 0.48300 | 0.48341 | 0.48382 | 0.48422 | 0.48461 | 0.48500 | 0.48537 | 0.48574 |
| 2.2 | 0.48610 | 0.48645 | 0.48679 | 0.48713 | 0.48745 | 0.48778 | 0.48809 | 0.48840 | 0.48870 | 0.48899 |
| 2.3 | 0.48928 | 0.48956 | 0.48983 | 0.49010 | 0.49036 | 0.49061 | 0.49086 | 0.49111 | 0.49134 | 0.49158 |
| 2.4 | 0.49180 | 0.49202 | 0.49224 | 0.49245 | 0.49266 | 0.49286 | 0.49305 | 0.49324 | 0.49343 | 0.49361 |
| 2.5 | 0.49379 | 0.49396 | 0.49413 | 0.49430 | 0.49446 | 0.49461 | 0.49477 | 0.49492 | 0.49506 | 0.49520 |
| 2.6 | 0.49534 | 0.49547 | 0.49560 | 0.49573 | 0.49585 | 0.49598 | 0.49609 | 0.49621 | 0.49632 | 0.49643 |
| 2.7 | 0.49653 | 0.49664 | 0.49674 | 0.49683 | 0.49693 | 0.49702 | 0.49711 | 0.49720 | 0.49728 | 0.49736 |
| 2.8 | 0.49744 | 0.49752 | 0.49760 | 0.49767 | 0.49774 | 0.49781 | 0.49788 | 0.49795 | 0.49801 | 0.49807 |
| 2.9 | 0.49813 | 0.49819 | 0.49825 | 0.49831 | 0.49836 | 0.49841 | 0.49846 | 0.49851 | 0.49856 | 0.49861 |
| 3.0 | 0.49865 | 0.49869 | 0.49874 | 0.49878 | 0.49882 | 0.49886 | 0.49889 | 0.49893 | 0.49896 | 0.49900 |

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung, etwa durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten (Gegen-)Beispiels.

**2A.** Sei $U = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > r^2\ \}$ der Raum außerhalb einer Kugel vom Radius $r \ge 0$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

*Begründete Antwort:*

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**2B.** Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt[3]{k}$ stetig?

*Begründete Antwort:*

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**2C.** Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ mit einer Basis aus Hauptvektorketten der Länge 3 und 2?

*Begründete Antwort:*

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**2D.** Wir integrieren $f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{1/z}$ entlang des positiv orientierten Randes $\partial R$ eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \partial R$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$ annehmen?

*Begründete Antwort:*

2

**2E.** Die Differentialgleichung $y'(x) = 3\,\sqrt[3]{y(x)^2}$ hat als mögliche Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Gibt es überkreuzende Lösungen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

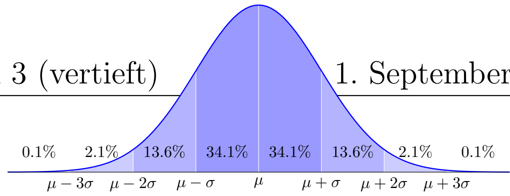
*Begründete Antwort:*

2

**2F.** Hat jede Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit stetig differenzierbarer rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und vorgegebenem Startwert $y(x_0) = y_0$ eine Lösung von der Form $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

*Begründete Antwort:*

2




**Aufgabe 3.** *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+4+3 = 11 Punkte)*

**3A.** In der Produktion entstehen Teile der Güteklasse $A$ mit Wkt 20%, $B$ mit 50% und $C$ mit 30% (zufällig und unabhängig). Sie produzieren 10 000 Teile, davon sei $X$ die Anzahl der Teile der Güteklasse $A$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p$ können Sie 1950 Teile der Güteklasse $A$ liefern? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

Erwartung $\mu(X) =$

Streuung $\sigma(X) =$

$p \approx$

4

**3B.** Die Feststellung der Güteklasse ist aufwändig und teuer. Die Forschungsabteilung erprobt daher einen kostensparenden Schnelltest für die Güteklasse $A$. Teile der Klasse $A$ bestehen ihn mit Wkt 85%, Klasse $B$ mit 20%, Klasse $C$ mit 10% (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) besteht ein zufällig aus der Produktion kommendes Teil diesen Test?

2

Das Teil besteht den Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) ist es von Güteklasse $C$?

2

**3C.** Beim Online-Dating sei die Trefferquote 0.1%. (Sorry, diese Rechnung ist unromantisch.) Die Probandin sichtet 2000 Profile, zufällig und unabhängig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit $p$ sind genau 2 Treffer darunter? (Exakt und gut genähert, Endergebnis in Prozent gerundet)

Exakte Formel $p =$

Näherungsformel $p \approx$

Näherungswert $p \approx$

3

**Aufgabe 4.** *Differentialgleichungssysteme (6+4+3 = 13 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**4A.** Berechnen Sie die Bildvektoren $Av_1$, $Av_2$, $Av_3$ in $\mathbb{R}^4$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination von $v_1, v_2, v_3$. Wählen Sie $v_4$ so, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Hauptvektorketten zu $A$ ist. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ bezüglich dieser Basis $\mathcal{B}$. Faktorisieren Sie das charakteristische Polynom $p_A(x)$.

$Av_1 =$ ☐ , $Av_2 =$ ☐

$Av_3 =$ ☐ , $v_4 =$ ☐

$B =$ ☐ , $p_A(x) =$ ☐

/ 6

**4B.** Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_k'(t) = A\,y_k(t)$ und $y_k(0) = v_k$.

$y_1(t) =$ ☐

$y_2(t) =$

$y_3(t) =$

$y_4(t) =$

4

**4C.** Das inhomogene Differentialgleichungssystem $u'(t) = A\,u(t) + 2t\,\mathrm{e}^{2t} v_1$ besitzt Lösungen der Form $u(t) = c(t)\,y_1(t)$. Leiten Sie diesen Ansatz ab und nutzen Sie $y_1'(t) = A\,y_1(t)$:

$u'(t) =$ $\quad \stackrel{!}{=} A\,c(t)\,y_1(t) + 2t\,\mathrm{e}^{2t} v_1$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten Sie eine Gleichung für $c'(t)$:

$c'(t) =$

Hieraus erhalten Sie eine Lösungsfunktion:

$c(t) =$

3

**Aufgabe 5.** *Differentialgleichungen (2+2+2+1+2+2 = 11 Punkte)*

**5A.** Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom $p$ und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$p(x) =$

Folgern sie hieraus die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$y(t) =$

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**5B.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^t$.

Ansatz:

$y(t) =$

Lösung:

$y(t) =$

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**5C.** Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

$y(t) =$

Leiten Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 10\cos(t)$ ab.

$y(t) =$

$\overline{\phantom{0}}$ 2

**5D.** Nennen Sie die allgem. Lösung $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ von $y'''(t)-2y''(t)+y'(t)-2y(t) = 10\cos(t)-6\,\mathrm{e}^t$:

$y(t) =$

1

---

Wir untersuchen für $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2\,u(x,y) + 10\,\partial_x\,u(x,y) = \partial_y^2\,u(x,y).$$

Gesucht sind alle nicht-trivialen Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$.

**5E.** Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $v(x)$:

Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(y)$:

2

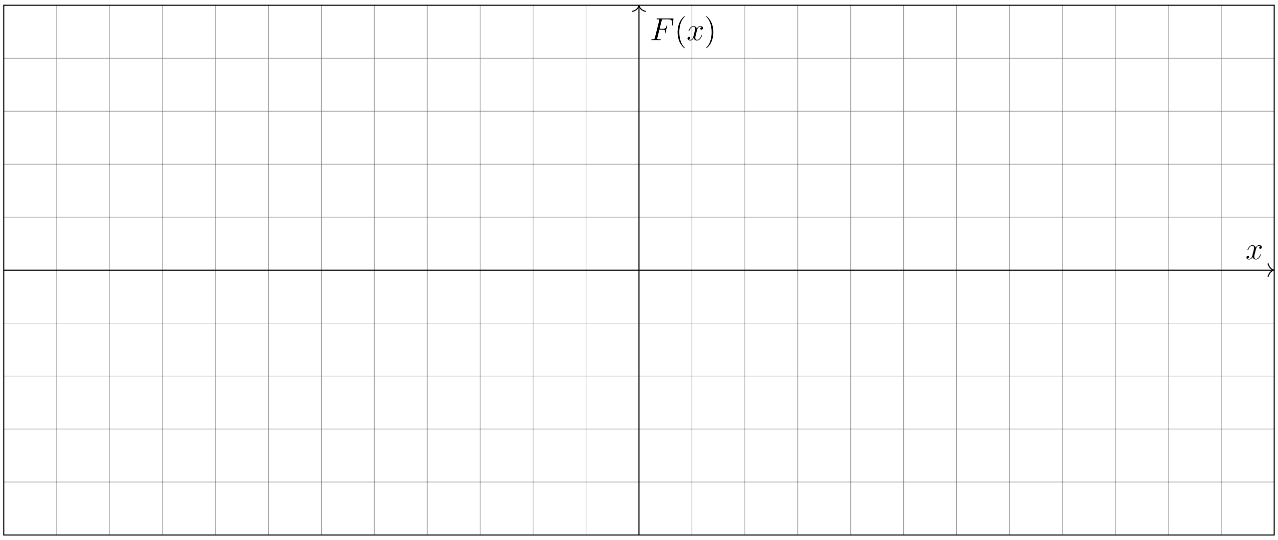
**5F.** Bestimmen Sie speziell für $w(y) = \cos(4y)$ die zugehörige Gleichung für $v(x)$:

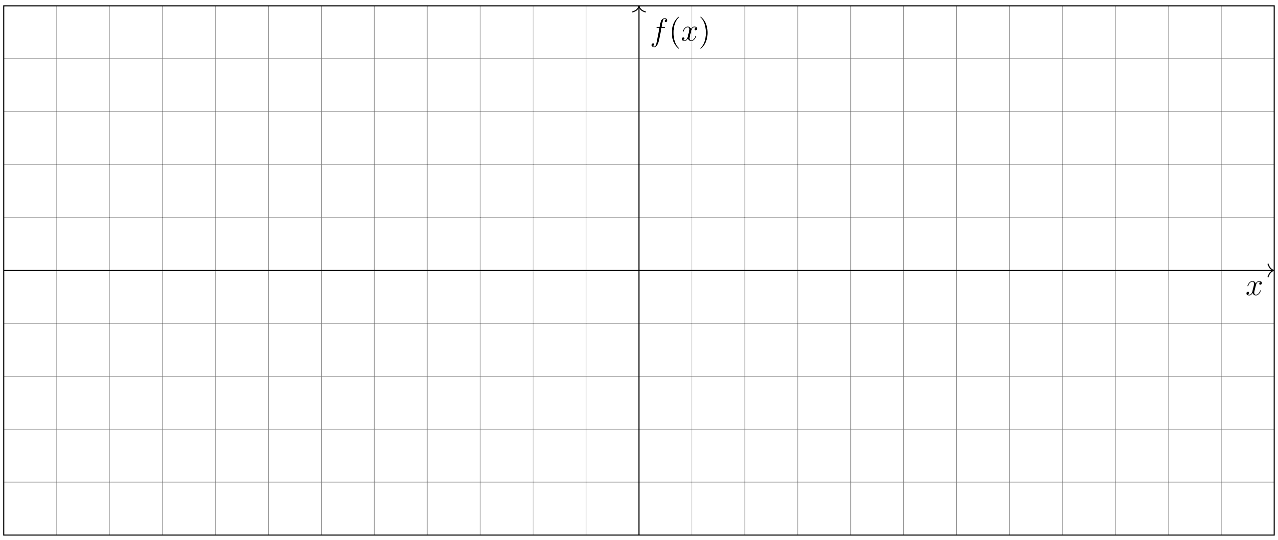
Nennen Sie alle Lösungen $u(x,y) = v(x)\cdot\cos(4y)$ unserer partiellen Differentialgleichung:

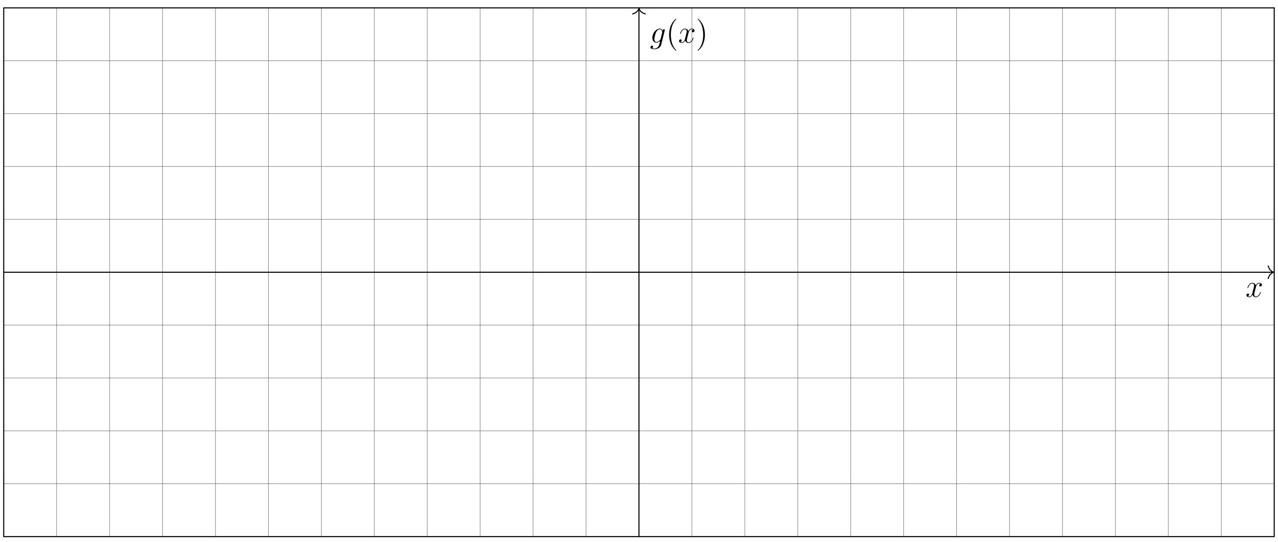
2

**Aufgabe 6.** *Fourier–Reihen (3+6+3 = 12 Punkte)*

**6A.** Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ungerade und $2\pi$–periodisch mit $F(x) = x(\pi - x)$ für $0 < x < \pi$.
Skizzieren Sie die Funktionen $F$ sowie ihre Ableitungen $f = F'$ und $g = F''$ auf $[-12, 12]$:




3

**6B.** Bestimmen Sie zu $g$, $f$, $F$ die Koeffizienten der Fourier–Reihe $g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)$ und $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ sowie $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$\beta_k =$

$a_k =$

$b_k =$

$A_k =$

$B_k =$

6

**6C.** Bestimmen Sie durch geeignete Auswertung den exakten Wert der alternierenden Reihe

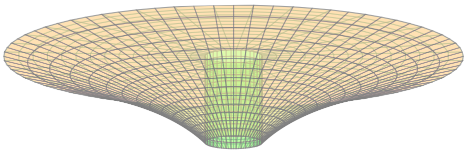
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = 1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \dots \approx 0.96\dots.$$

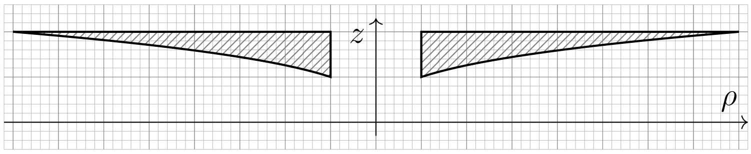
3

**Aufgabe 7.** *Integration über Körper und Flächen (6+2+3+2+1 = 14 Punkte)*

Wir betrachten folgenden Rotationskörper mit zentraler Ausbohrung:

$$K = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \le z \le 2,\ 1 \le x^2+y^2 \le z^6 \right\}.$$






**7A.** Parametrisieren Sie den Körper $K$ in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 1 \le z \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \boxed{\qquad} \le \rho \le \boxed{\qquad}.$$

Berechnen Sie den Normalenvektor der Mantelfläche $M = \left\{ (x,y,z) \in K \;\middle|\; x^2+y^2 = z^6 \right\}$:

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \boxed{\qquad} \times \boxed{\qquad} = \boxed{\qquad}$$

/3

Berechnen Sie hiermit den Flächeninhalt von $M$. *Plausibilitätsprobe:* $(\sqrt{145}^3 - \sqrt{10}^3)/27 \approx 63.5$.

$\operatorname{vol}_2(M) =$

/3

**7B.** Bestimmen Sie auf $K$ die Quelldichte und die Quellstärke des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-1 \\ x^2+xy+y^2-1 \\ \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2} \end{pmatrix}: \quad \operatorname{div} f = \boxed{\qquad}, \quad \int_K \operatorname{div} f \,\mathrm{d}V = \boxed{\qquad}$$

/2

**7C.** Berechnen Sie den Fluss von $f$ durch den Deckel $D = \{\ (x,y,z) \in K \mid z = 2\ \}$ nach außen:

$$I_D := \int_{s \in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

3

**7D.** Berechnen Sie den Fluss von $f$ durch den Zylinder $Z = \{\ (x,y,z) \in K \mid x^2 + y^2 = 1\ \}$:

$$I_Z := \int_{s \in Z} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

2

**7E.** Bestimmen Sie schließlich den Fluss $I_M$ von $f$ durch die Mantelfläche $M$ nach außen:

1

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.