Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Studiengang: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; bearbeiten Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/13	/11	/12	/14	/74

Erläuterung: Zur Nacharbeit dieser Klausur sind die Antworten ausgiebig erläutert. Ergebnisse und Rechnungen sind ausführlicher dargestellt, als in der Prüfung verlangt war. Möge es nützen!

Tipp für zukünftige Leser: Ihre Vorlesung und die wöchentlichen Übungen erklären Ihnen diese wunderbaren Rechentechniken. Gehen Sie hin, arbeiten Sie kontinuierlich mit, es lohnt sich!

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,dt \approx 0.49506$.

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung, etwa durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten (Gegen-)Beispiels.

2A. Sei $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 > r^2 \,\}$ der Raum außerhalb einer Kugel vom Radius $r \ge 0$. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\operatorname{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Ja, denn das betrachtete Gebiet U ist einfach zusammenhängend.

Erläuterung: Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für die Existenz eines Potentials, aber hinreichend erst auf einem **einfach zusammenhängenden** Gebiet. Andernfalls gibt es Gegenbeispiele, auf dem Gebiet $V = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R} \mid x^2+y^2 > r^2 \,\}$ etwa das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der z–Achse. Diese Fragestellung und prominente Vektorfelder wurden in Übung und Vorlesung ausführlich und mehrfach behandelt.

$\overline{}$ 2

2B. Ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kx)/\sqrt[3]{k}$ stetig?

Begründete Antwort:

Nein, denn die Koeffizienten sind nicht **quadrat-summierbar**: $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3} = \infty$.

Erläuterung: Jede absolut integrierbare Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ erlaubt eine Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Es gilt die **Energiegleichung**:

$$\int_{x=0}^{2\pi} \bigl|f(x)\bigr|^2 \,\mathrm{d}x \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \bigl|c_k\bigr|^2 \quad = \quad \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \bigl|a_k\bigr|^2 + \bigl|b_k\bigr|^2$$

Für jede stetige Funktion f ist links das Integral endlich, also auch rechts die Reihe.
Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2/3}$ divergiert jedoch, also kann unsere Funktion f nicht stetig sein.
(Die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ wurde ausführlich in HM2 und HM3 behandelt.)

$\overline{}$ 2

2C. Gibt es eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{5\times5}$ mit einer Basis aus Hauptvektorketten der Länge 3 und 2?

Begründete Antwort:

Ja, das typische **Beispiel** ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

Erläuterung: Das charakteristische Polynom ist $P_A(x) = \det(A - xE) = (\lambda - x)^3(\mu - x)^2$, die Hauptvektorketten sind offensichtlich $0 \xleftarrow{A-\lambda} e_1 \xleftarrow{A-\lambda} e_2 \xleftarrow{A-\lambda} e_3$ und $0 \xleftarrow{A-\mu} e_4 \xleftarrow{A-\mu} e_5$. Umgekehrt gilt: Sei $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{C}^5$ eine Hauptvektorkette zum Eigenwert λ und $v_4, v_5 \in \mathbb{C}^5$ zum Eigenwert μ. Im Falle $\lambda \ne \mu$ bilden diese Vektoren eine Basis des $\mathbb{C}^5$, und bezüglich dieser Basis stellt sich A wie oben dar. Im Falle $\lambda = \mu$ müssen wir zusätzlich fordern bzw. sicherstellen, dass die Vektoren v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 linear unabhängig sind, also eine Basis des $\mathbb{C}^5$.

$\overline{}$ 2

2D. Wir integrieren $f(z) = z^2\,\mathrm{e}^{1/z}$ entlang des positiv orientierten Randes ∂R eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \partial R$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$ annehmen?

Begründete Antwort:

Das **Residuum** der holomorphen Funktion $f(z) = z^2 + z + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots$ in der einzigen Polstelle $z = 0$ ist hier $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 1/6$. Dank **Residuensatz** gilt:

$$\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z \quad = \quad 2\pi\mathrm{i} \sum_{s \in \mathring{R}} \operatorname{res}_s(f) \quad = \quad \begin{cases} \pi\mathrm{i}/3 & \text{für } 0 \in \mathring{R}, \\ 0 & \text{für } 0 \in \mathbb{C} \setminus R. \end{cases}$$

Erläuterung: Der Residuensatz für holomorphe Funktionen vereinfacht viele Integrale! Die vorliegende Frage zielt auf ein besonders einfaches Beispiel.

2

2E. Die Differentialgleichung $y'(x) = 3\sqrt[3]{y(x)^2}$ hat als mögliche Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3$. Gibt es überkreuzende Lösungen $u, v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u(-1) < v(-1)$ und $u(1) > v(1)$?

Begründete Antwort:

Ja. Zum Beispiel $u(x) = x^3$ und $v(x) = 0$.

Erläuterung: Beide Funktionen sind Lösungen (Probe!) und gehen durch den Nullpunkt, $u(0) = v(0) = 0$. Cauchys **Eindeutigkeitssatz** für die Lösung von Differentialgleichungen lässt sich hier jedoch nicht anwenden, denn er verlangt, dass die rechte Seite nach y stetig differenzierbar ist. Für unsere Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit $f(x, y) = 3y^{2/3}$ und $\partial_y f(x, y) = 2y^{-1/3}$ ist dies just in $y = 0$ nicht der Fall! Untersuchen Sie zur Übung diese DG genauer: Durch jeden Startpunkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ laufen unendlich viele Lösungen $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Das mutet zugegeben recht pathologisch an, ist aber wie gesehen durchaus möglich. Ist f nach y stetig differenzierbar, so garantiert der E&E–Satz, dass solche Pathologien nicht auftreten.

2

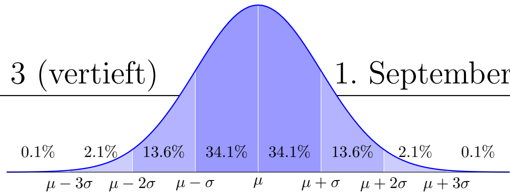
2F. Hat jede Differentialgleichung $y'(x) = f(x, y(x))$ mit stetig differenzierbarer rechter Seite $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und vorgegebenem Startwert $y(x_0) = y_0$ eine Lösung von der Form $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Nein, im Allgemeinen ist das Lösungsintervall nicht $\mathbb{R}$ sondern nur ein *Teilintervall* $I \subset \mathbb{R}$. Die Lösung $y : \mathbb{R} \supset I \to \mathbb{R}$ kann an den Rändern des Intervalls I in *Polstellen* laufen. Beispiel: Zu $y'(x) = y(x)^2$, $y(0) = 1$, lebt die Lösung $y(x) = 1/(1 - x)$ maximal auf $I = \mathbb{R}_{<1}$.

Erläuterung: Wir setzen f hier als stetig differenzierbar voraus. Dank des **Existenz- und Eindeutigkeitssatzes** existiert genau eine maximale Lösung $y : I \to \mathbb{R}$ auf einem geeigneten Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ sodass $y(x_0) = y_0$ und $y'(x) = f(x, y(x))$ für alle $x \in I$ gilt. Der Satz sagt *nicht*, dass dies immer für $I = \mathbb{R}$ gelingt. Tatsächlich kann die Lösung y **Polstellen** haben, wie im Beispiel, und hierdurch kann I einseitig oder beidseitig beschränkt sein.

2



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeitsrechnung (4+4+3 = 11 Punkte)*

3A. In der Produktion entstehen Teile der Güteklasse A mit Wkt 20%, B mit 50% und C mit 30% (zufällig und unabhängig). Sie produzieren 10 000 Teile, davon sei X die Anzahl der Teile der Güteklasse A. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p können Sie 1950 Teile der Güteklasse A liefern? (Ergebnis in Prozent, gerundet auf den nächstgelegenen Prozentpunkt)

Erwartung $\mu(X) = 10\,000 \cdot 0.2 = 2000$

Streuung $\sigma(X) = \sqrt{10\,000 \cdot 0.2 \cdot 0.8} = \sqrt{1600} = 40$

$p = \mathbf{P}(X \geq 1950) \approx \int_\alpha^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ mit $\alpha = (1950 - \mu - 1/2)/\sigma = -1.2625.$

$p \approx \int_0^\infty \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{1.2625} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.5000 + 0.3966 \approx 90\%$

Erläuterung: Exakt folgt X der Binomialverteilung $B(10000, 0.2)$. Als Näherung nutzen wir die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$. Den Wert des Integrals entnehmen wir der Tabelle, s. Seite 2. Ohne die Stetigkeitskorrektur $-1/2$ erhält man gerundet $0.8943 \approx 89\%$, also knapp zu wenig. Die exakte Rechnung durch Summation ist mühsamer; sie ergibt den Wert $p = 0.89688\ldots$. 4

3B. Die Feststellung der Güteklasse ist aufwändig und teuer. Die Forschungsabteilung erprobt daher einen kostensparenden Schnelltest für die Güteklasse A. Teile der Klasse A bestehen ihn mit Wkt 85%, Klasse B mit 20%, Klasse C mit 10% (zufällig und unabhängig). Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) besteht ein zufällig aus der Produktion kommendes Teil diesen Test?

$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}(T \cap A) + \mathbf{P}(T \cap B) + \mathbf{P}(T \cap C)$ Disjunkte Zerlegung

$= \mathbf{P}(T|A)\,\mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(T|B)\,\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(T|C)\,\mathbf{P}(C)$ Formel der totalen Wkt

$= 0.85 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.3 = 0.30 = 30\%$ Einsetzen und ausrechnen 2

Das Teil besteht den Test. Mit welcher Wahrscheinlichkeit (in %) ist es von Güteklasse C?

$\mathbf{P}(C|T) = \mathbf{P}(T \cap C)/\mathbf{P}(T)$ Bedingte Wahrscheinlichkeit

$= \mathbf{P}(T|C)\,\mathbf{P}(C)/\mathbf{P}(T)$ Formel von Bayes / Dreisatz

$= 0.1 \cdot 0.3/0.3 = 0.10 = 10\%$ Einsetzen und ausrechnen 2

3C. Beim Online-Dating sei die Trefferquote 0.1%. (Sorry, diese Rechnung ist unromantisch.) Die Probandin sichtet 2000 Profile, zufällig und unabhängig. Mit welcher Wahrscheinlichkeit p sind genau 2 Treffer darunter? (Exakt und gut genähert, Endergebnis in Prozent gerundet)

Exakte Formel $$p = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \binom{2000}{2} \cdot 0.001^2 \cdot 0.999^{1998}$$

mit den gegebenen Daten $n = 2000$, $t = 1/1000$, $k = 2$

Näherungsformel $$p \approx \frac{\mu^k}{k!} \mathrm{e}^{-\mu} = \frac{2^2}{2!} \mathrm{e}^{-2} \quad \text{mit } \mu = nt = 2,\ k = 2$$

Näherungswert $$p \approx \frac{2^2}{2!} \mathrm{e}^{-2} \approx 2 \cdot 0.135 = 27\% \quad \text{dank Tabelle, s. Seite 2}$$

Erläuterung: Die exakte Formel ist die Binomialverteilung $B(n,t)(k)$ für k Treffer bei n unabhängigen Versuche mit Trefferwkt t. Für große n und kleine t können wir dies annähern durch die Poisson–Verteilung $P(\mu)(k)$. Der totale Abstand $nt^2 = 0.002$ ist hier recht gering. Die exakte Rechnung ergibt $p = 0.2708\ldots$, unsere Näherung ist wie erwartet sehr gut.

Eine Näherung durch die Normalverteilung $N(\mu, \sigma^2)$ ist hier offensichtlich riskant, aber dank günstiger Umstände ist das Ergebnis dennoch akzeptabel: Mit $\mu = 2$ und $\sigma \approx 1.414$ erhalten wir $-\alpha = \beta = 0.5/1.414 \approx 0.3536$ und $p \approx \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2 \cdot 0.138 = 0.276 \approx 28\%$. Machen Sie sich eine realistische Skizze und verdeutlichen Sie sich erneut die Stetigkeitskorrektur $\pm 1/2$.

3

Aufgabe 4. *Differentialgleichungssysteme* (*6+4+3 = 13 Punkte*)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Erläuterung: Das ist ein lineares DGSystem mit konstanter Koeffizientenmatrix A. Wir lösen es durch Eigen-/Hauptvektoren von A und die zugehörigen Eigen-/Hauptfunktionen von $y' = Ay$. Zur Erleichterung genügt für diese Aufgabe, die gegebenen Vektoren v_1, v_2, v_3 zu nutzen und den letzten v_4 abzulesen. Daraus ergeben sich Jordan–Form und charakteristisches Polynom.

4A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3 in $\mathbb{R}^4$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Wählen Sie v_4 so, dass $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ eine Basis des $\mathbb{R}^4$ aus Hauptvektorketten zu A ist. Schreiben Sie die lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4 : v \mapsto Av$ als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ bezüglich dieser Basis $\mathcal{B}$. Faktorisieren Sie das charakteristische Polynom $p_A(x)$.

$$Av_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +2v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Eigenvektor!}, \qquad Av_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +1v_1 \\ +2v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Hauptvektor!}$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} +0v_1 \\ +0v_2 \\ +0v_3 \end{cases} \quad \text{Eigenvektor!}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ Av_4 = 2v_4 \quad \text{Eigenvektor!} \quad (\text{evtl. } v_4' = \alpha v_1 + \beta v_4)$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Jordan–Form!}, \qquad p_A(x) = p_B(x) = (x-2)^3\,x$$

6

4B. Bestimmen Sie die Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ mit $y_k'(t) = A\,y_k(t)$ und $y_k(0) = v_k$.

$$y_1(t) = e^{2t} v_1 = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Dies ist eine Eigenfunktion.}$$

$$y_2(t) = \boxed{\mathrm{e}^{2t}\big[v_2 + tv_1\big] = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} \quad + t \\ 1 \\ 1+2t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Hauptfunktion zweiter Stufe}}$$

$$y_3(t) = \boxed{\mathrm{e}^{0t} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Dies ist eine Eigenfunktion.}}$$

$$y_4(t) = \boxed{\mathrm{e}^{2t} v_4 = \mathrm{e}^{2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{r}\text{Dies ist eine Eigenfunktion.} \\ (\text{evtl. } v_4' = \alpha v_1 + \beta v_4 \text{ wie oben})\end{array}}$$

4

4C. Das inhomogene Differentialgleichungssystem $u'(t) = A\,u(t) + 2t\,\mathrm{e}^{2t} v_1$ besitzt Lösungen der Form $u(t) = c(t)\,y_1(t)$. Leiten Sie diesen Ansatz ab und nutzen Sie $y_1'(t) = A\,y_1(t)$:

$$u'(t) = \boxed{c'(t)\,y_1(t) + c(t)\,y_1'(t) \quad = \quad c'(t)\,\underbrace{\mathrm{e}^{2t} v_1}_{=y_1(t)} + c(t)\,\underbrace{A\,y_1(t)}_{=y_1'(t)}} \stackrel{!}{=} A\,c(t)\,y_1(t) + 2t\,\mathrm{e}^{2t} v_1$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten Sie eine Gleichung für $c'(t)$:

$$c'(t) = \boxed{2t \qquad \text{Koeffizientenvergleich in der vorigen Gleichung}}$$

Hieraus erhalten Sie eine Lösungsfunktion:

$$c(t) = \boxed{t^2 \qquad \text{Als Lösung finden wir also } u(t) = t^2\,\mathrm{e}^{2t} v_1\text{. Machen Sie die Probe!}}$$

3

Erläuterung: Der gegebene Ansatz ist ein Spezialfall der Variation der Konstanten, allgemein $u(t) = c_1(t)y_1(t) + c_2(t)y_2(t) + c_3(t)y_3(t) + c_4(t)y_4(t)$. Die volle Methode müssen Sie hier nicht anwenden, es genügt für diese Aufgabe, den gegebenen Ansatz einzusetzen und durchzurechnen.

Aufgabe 5. *Differentialgleichungen* (2+2+2+1+2+2 = 11 Punkte)

5A. Lösen Sie die homogene lineare Differentialgleichung $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 0$.

Bestimmen Sie das zugehörige charakteristische Polynom p und seine Faktorisierung über $\mathbb{C}$:

$$p(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^2+1)(x-2) = (x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})(x-2)$$

Folgern sie hieraus die allgemeine reelle Lösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unserer Differentialgleichung:

$$y(t) = c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) + c_3\, \mathrm{e}^{2t} \text{ mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

Fundamentallösungen!

2

5B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^t$.

Ansatz:

$$y(t) = c\,\mathrm{e}^t$$

Ansatz für spezielle rechte Seite ohne Resonanz!

Lösung:

$$y(t) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^t$$

Lösungsformel $c = 1/p(1)$ oder Koeffizientenvergleich!

2

5C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$.

$$y(t) = \frac{t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{p'(\mathrm{i})} = \frac{t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{-2-4\mathrm{i}} = \frac{-1+2\mathrm{i}}{10}\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$$

Der Ansatz $c\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ liefert $(-2-4\mathrm{i})c = 1$.

Leiten Sie eine Partikulärlösung $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ von $y'''(t) - 2y''(t) + y'(t) - 2y(t) = 10\cos(t)$ ab.

$$y(t) = \mathrm{Re}\Big[(-1+2\mathrm{i})\,t\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\Big] = -t\cos(t) - 2t\sin(t)$$

Realteil der vorigen Lösung mal 10.

2

5D. Nennen Sie die allgem. Lösung $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ von $y'''(t)-2y''(t)+y'(t)-2y(t) = 10\cos(t)-6\,\mathrm{e}^t$:

$$y(t) = (c_1 - t)\cos(t) + (c_2 - 2t)\sin(t) + c_3\,\mathrm{e}^{2t} + 3\,\mathrm{e}^t \qquad \text{mit } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

1

Wir untersuchen für $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ die partielle Differentialgleichung

$$\partial_x^2\, u(x,y) + 10\,\partial_x\, u(x,y) = \partial_y^2\, u(x,y).$$

Gesucht sind alle nicht-trivialen Lösungen in Produktform $u(x,y) = v(x)\cdot w(y)$.

5E. Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $v(x)$:

$$\frac{v''(x)+10v'(x)}{v(x)} = \lambda, \qquad \text{also} \qquad v''(x)+10v'(x) = \lambda v(x)$$

Bestimmen Sie die gewöhnliche Differentialgleichung für $w(y)$:

$$\frac{w''(y)}{w(y)} = \lambda, \qquad \text{also} \qquad w''(y) = \lambda w(y)$$

2

5F. Bestimmen Sie speziell für $w(y) = \cos(4y)$ die zugehörige Gleichung für $v(x)$:

$$w''(y) = -16w(y) \qquad \text{also} \qquad \lambda = -16 \qquad \text{und somit} \qquad v''(x)+10v'(x) = -16v(x)$$

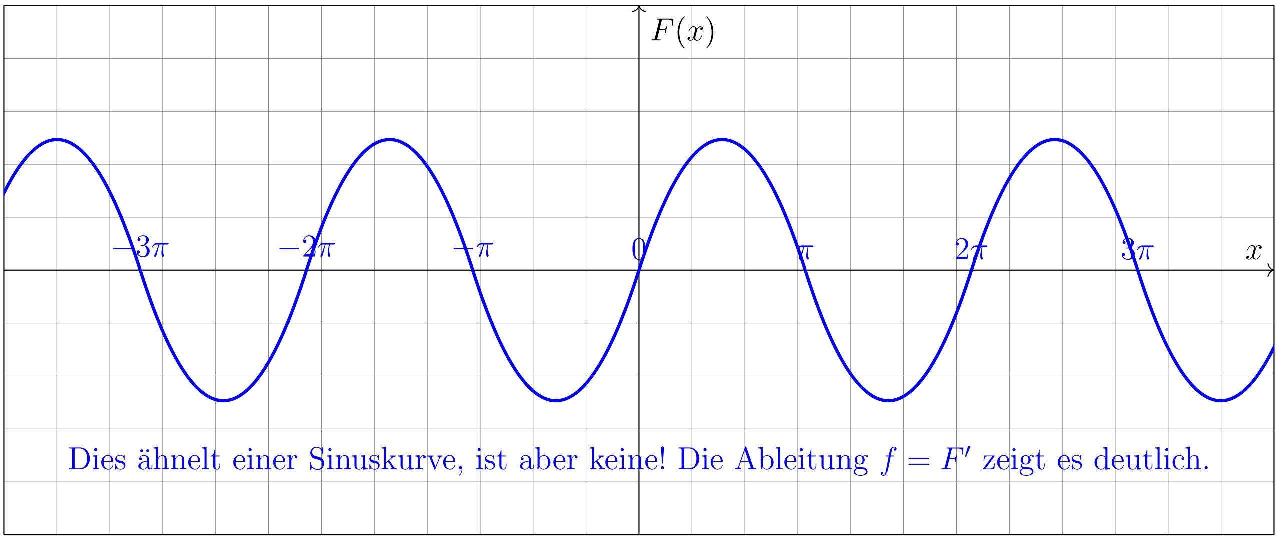
Nennen Sie alle Lösungen $u(x,y) = v(x)\cdot\cos(4y)$ unserer partiellen Differentialgleichung:

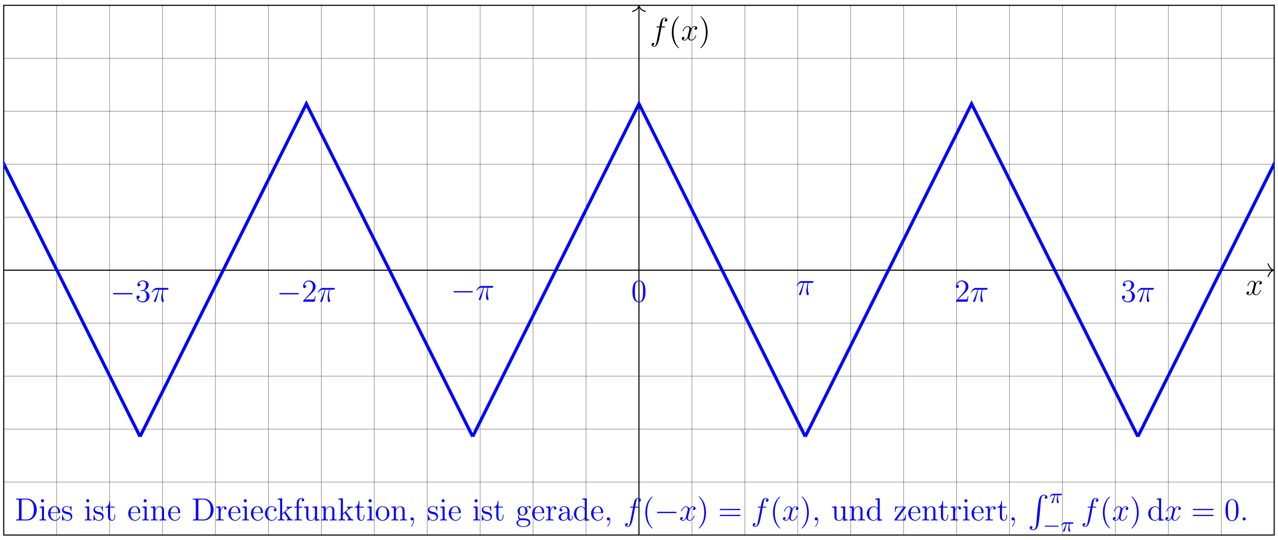
$$u(x,y) = \left(c_1\,\mathrm{e}^{-8x} + c_2\,\mathrm{e}^{-2x}\right)\cdot\cos(4y) \qquad \text{mit } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

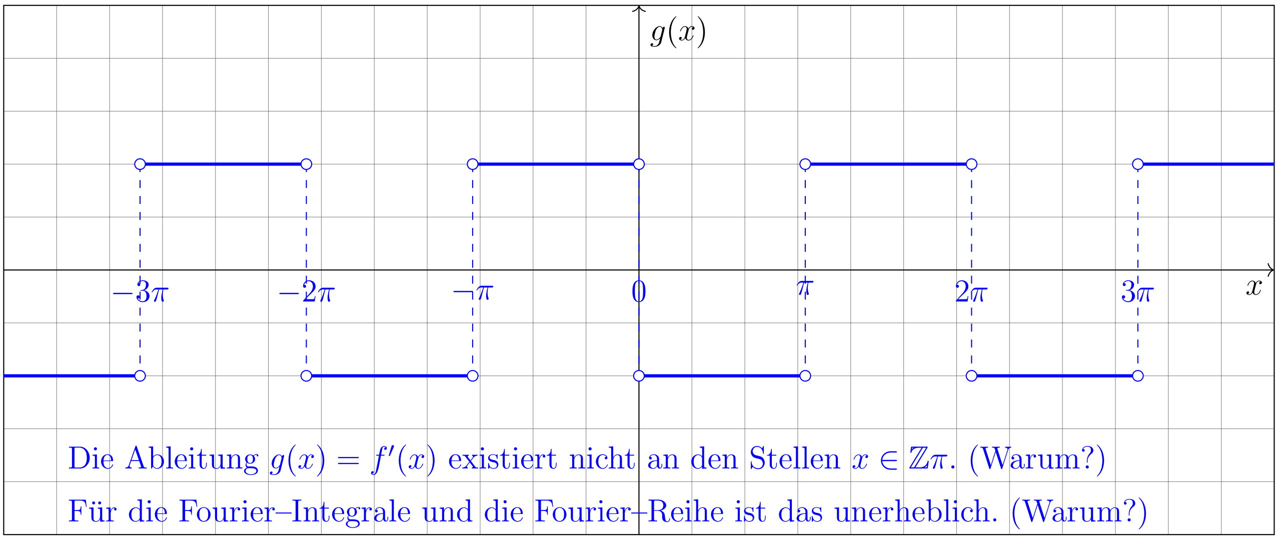
2

Aufgabe 6. *Fourier–Reihen (3+6+3 = 12 Punkte)*

6A. Sei $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ungerade und 2π–periodisch mit $F(x)=x(\pi-x)$ für $0<x<\pi$. Skizzieren Sie die Funktionen F sowie ihre Ableitungen $f=F'$ und $g=F''$ auf $[-12,12]$:







3

6B. Bestimmen Sie zu g, f, F die Koeffizienten der Fourier–Reihe $g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \sin(kx)$ und $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$ sowie $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$:

$$\beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} -2\sin(kx)\,\mathrm{d}x \qquad \text{gerader Integrand!}$$

$$= \frac{4}{k\pi}\Big[\cos(kx)\Big]_0^{\pi} = \begin{cases} -8/k\pi & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \qquad \text{wie immer ausrechnen!}$$

Wie in der Aufgabenstellung angegeben gilt $\alpha_k = 0$, da die Funktion g ungerade ist.

$$a_k = -\beta_k/k = \begin{cases} 8/k^2\pi & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \qquad \text{Integration von } g \text{ zu } f$$

$$b_k = \alpha_k/k = 0 \qquad \text{Integration von } g \text{ zu } f \text{ (gerade!)}$$

Achtung! Hier gilt $a_0 = 0$, da f zentriert ist, also $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ erfüllt, siehe Skizze!

$$A_k = -b_k/k = 0 \qquad \text{Integration von } f \text{ zu } F \text{ (ungerade!)}$$

$$B_k = a_k/k = \begin{cases} 8/k^3\pi & \text{für } k \text{ ungerade,} \\ 0 & \text{für } k \text{ gerade.} \end{cases} \qquad \text{Integration von } f \text{ zu } F$$

6

6C. Bestimmen Sie durch geeignete Auswertung den exakten Wert der alternierenden Reihe
$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = 1 - \frac{1}{27} + \frac{1}{125} - \frac{1}{343} + \dots \approx 0.96\dots.$$

$$F(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin\big((2j+1)x\big)}{(2j+1)^3} \qquad \text{Spezialisieren in } x = \pi/2$$

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{8}{\pi}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} \qquad \text{Einsetzen und Vereinfachen}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j+1)^3} = \frac{\pi^3}{32} \approx 0.96894\dots \qquad \text{Auflösen nach der Reihe}$$

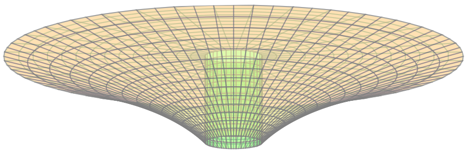
Erläuterung: Die erste Gleichung gilt dank des Satzes von Dirichlet in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$. Da F stetig differenzierbar ist, konvergiert das Fourier–Polynom $F_n(X) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(kx)$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ gegen den Funktionswert $F(x)$. Wir nutzen dies speziell in $x = \pi/2$.
Ergänzung: Die Konvergenz von F_n gegen F gilt nicht nur punktweise, für jedes einzelne $x \in \mathbb{R}$, sondern sogar gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$, d.h. zu jedem noch so kleinen $\varepsilon > 0$ gibt es einen Index $m \in \mathbb{N}$, sodass für $n \geq m$ schließlich alle F_n in einem ε–Schlauch um F liegen.

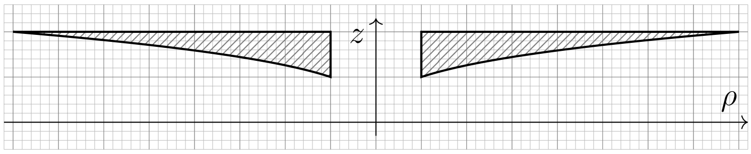
3

Aufgabe 7. *Integration über Körper und Flächen (6+2+3+2+1 = 14 Punkte)*

Wir betrachten folgenden Rotationskörper mit zentraler Ausbohrung:

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 1 \le z \le 2,\ 1 \le x^2 + y^2 \le z^6 \right\}.$$





7A. Parametrisieren Sie den Körper K in Zylinderkoordinaten:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix} =: \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad 1 \le z \le 2, \quad 0 \le \varphi \le 2\pi, \quad \boxed{1} \le \rho \le \boxed{z^3}.$$

Berechnen Sie den Normalenvektor der Mantelfläche $M = \left\{ (x, y, z) \in K \;\middle|\; x^2 + y^2 = z^6 \right\}$:

$$\frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} = \boxed{\begin{pmatrix} -z^3\sin\varphi \\ z^3\cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}} \times \boxed{\begin{pmatrix} 3z^2\cos\varphi \\ 3z^2\sin\varphi \\ 1 \end{pmatrix}} = \boxed{z^3 \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ -3z^2 \end{pmatrix}}$$

3

Berechnen Sie hiermit den Flächeninhalt von M. *Plausibilitätsprobe:* $(\sqrt{145}^3 - \sqrt{10}^3)/27 \approx 63.5$.

$$\operatorname{vol}_2(M) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{z=1}^{2} \left| \frac{\partial \Phi_M}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_M}{\partial z} \right| \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\varphi$$ Flächenelement ausrechnen

$$= 2\pi \int_{z=1}^{2} z^3 \sqrt{1 + 9z^4}\, \mathrm{d}z = \frac{\pi}{18} \int_{u=10}^{145} \sqrt{u}\, \mathrm{d}u$$ Substitution $u = 1 + 9z^4$, $\mathrm{d}u = 36z^3\, \mathrm{d}z$

$$= \frac{\pi}{18} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_{u=10}^{145} = \frac{\pi}{27} \left[\sqrt{145}^3 - \sqrt{10}^3 \right]$$ Ausrechnen! Ist das Plausibel?

$$\approx 63.5\pi > 63\pi = \pi\left[8^2 - 1^2\right]$$ Das entspricht dem Deckel!

Erläuterung: Das Ergebnis ist hier nicht besonders schön und rund; auch das kommt vor. Immerhin kann man das Integral leicht berechnen und das Ergebnis auf Plausibilität prüfen: Der Flächeninhalt des Mantels M ist etwas größer als der des Deckels D, siehe obige Skizze.

3

7B. Bestimmen Sie auf K die Quelldichte und die Quellstärke des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - 1 \\ x^2 + xy + y^2 - 1 \\ \mathrm{e}^{-x^2} \cdot \mathrm{e}^{-y^2} \end{pmatrix}: \quad \operatorname{div} f = \boxed{3x + 2y}, \quad \int_K \operatorname{div} f \, \mathrm{d}V = \boxed{0 \text{ Symmetrie!}}$$

2

7C. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Deckel $D = \{\, (x,y,z) \in K \mid z = 2 \,\}$ nach außen:

$$I_D := \int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$
Die Einheitsnormale ist hier $n_D = (0,0,1)$.

$$= \int_{(x,y,2)\in D} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\, \mathrm{d}(x,y)$$
Wir transformieren in Polarkoordinaten...

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=1}^{8} \mathrm{e}^{-\rho^2}\, \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\varphi$$
Funktionaldeterminante ρ nicht vergessen!

$$= \pi \Big[-\mathrm{e}^{-\rho^2} \Big]_{\rho=1}^{8} \quad = \quad \pi\big(\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-64}\big)$$
Stammfunktion ausschreiben und auswerten.

Erläuterung: Ebenso können Sie D durch Φ_D parametrisieren (mit $z = 2$) und die Normale $\partial_\rho \Phi_D \times \partial_\varphi \Phi_D = (0,0,\rho)$ verwenden. Das Integral kennen Sie vom Gaußschen Kunstgriff zur Berechnung von $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi}$. Transformationssatz und Funktionaldeterminante: Erst der korrekte Faktor ρ ergibt die einfache Stammfunktion! Ohne geht's nicht.

3

7D. Berechnen Sie den Fluss von f durch den Zylinder $Z = \{\, (x,y,z) \in K \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}$:

$$I_Z := \int_{s\in Z} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$
Die Einheitsnormale ist $n_Z(x,y,z) = (-x,-y,0)$.

$$= \int_{(x,y,z)\in Z} \begin{pmatrix} -y^2 \\ xy \\ \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix} |\mathrm{d}S|$$
Einsetzen von $s = (x,y,z)$ mit $x^2 + y^2 = 1$ ...

$$= \int_{(x,y,z)\in Z} 0\, |\mathrm{d}S| = 0$$
... und sorgsam ausrechnen.

Erläuterung: Alternativ können Sie Z ebenso in Zylinderkoordinaten parametrisieren durch $(x,y,z) = (\cos\varphi, \sin\varphi, z) = \Phi_Z(\varphi, z)$ mit $0 \le \varphi \le 2\pi$ und $1 \le z \le 2$. Der auf Z nach außen gerichtete Normalenvektor ist dann $(-\cos\varphi, -\sin\varphi, 0)$. Die Rechnung verläuft genauso.

2

7E. Bestimmen Sie schließlich den Fluss I_M von f durch die Mantelfläche M nach außen:

Wir nutzen dankend den Satz von Gauß: $I_M = I_K - I_D - I_Z = \pi(\mathrm{e}^{-64} - \mathrm{e}^{-1})$
Hierbei sind I_K, I_D, I_Z die zuvor berechneten Integrale aus den Aufgaben 7B,C,D.
Sie können $I_M = \int_{s\in M} f(s) \bullet \mathrm{d}S$ auch direkt integrieren, versuchen Sie es als Übung!

1

Diese Seite ist absichtlich leer und darf es auch bleiben.