Übungsblatt 6: Partielle Differentialgleichungen

Für die Prüfungsvorbereitung am 12. Februar 2016

1 Charakteristik? Kann man das essen?

Gegeben sei die partielle Differentialgleichung

$$(x+y)\partial_x u + y\partial_y u = \frac{x}{y}$$

mit den Nebenbedingungen $y > 0$ und $u(x,1) = x^2$.

(a) Von welchem Typ ist die angegebene Differentialgleichung? Bestimmen Sie Funktionen $a(x,y), b(x,y)$ und $c(x,y)$ so, dass

$$a(x,y)\partial_x u + b(x,y)\partial_y u = c(x,y).$$

(b) Bestimmen und lösen Sie das DGsystem für die charakteristischen Kurven $(x(s), y(s), z(s))$.

(c) Eine Lösung u der PDG erfüllt $u(x(s), y(s)) = z(s)$. Drücken Sie s und x_0 in Abhängigkeit von x und y aus und bestimmen Sie so eine Lösung u. Machen Sie anschließend die Probe.

2 Nachtisch

Wir sind noch nicht müde und möchten eine weitere PDG lösen, nämlich

$$(2x+2y-u)\partial_x u + u\partial_y u = -y$$

mit den Nebenbedingungen $y \in [-1,1]$ und $u(x,1) = 0$.

(a) Bestimmen Sie den Typ dieser PDG und Funktionen $a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u)$ sodass

$$a(x,y,u)\partial_x u + b(x,y,u)\partial_y u = c(x,y,u).$$

(b) Bestimmen und lösen Sie das DGsystem für die charakteristischen Kurven $(x(s), y(s), z(s))$.

(c) Bestimmen Sie nun eine Lösung der PDG wie zuvor. Verwenden Sie, bei Bedarf, dass $\sin(\arccos(t)) = \sqrt{1-t^2}$.

3 Wie Eiweiß und Eigelb

Um alles abzudecken noch eine letzte Aufgabe, die mit dem Produktansatz gelöst werden soll:

$$u + \partial_{tt}u - \partial_x u = 0$$

mit den Randbedingungen $u(0,x) = 0, u(\frac{\pi}{2}, x) = 0$.

(a) Verwenden Sie den Produktansatz $u(t,x) = v(x)w(t)$ und bestimmen Sie Lösungen in Abhängigkeit der Separationskonstante $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Welche dieser Lösungen erfüllen die Randbedingungen? Geben Sie die allgemeine Lösung der PDG an.