Übungsblatt 5: Differentialgleichungssysteme

Für die Prüfungsvorbereitung am 11./12. Februar 2016

1 H steht für „Hauptvektor". Oder doch für „Hängt mir zum Hals raus"?
Gegeben seien die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -13 & 5 & 1 \\ 1 & -6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

sowie die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ziel dieser Aufgabe wird es sein, eine Lösung für das DGsystem
$u'(t) = A \cdot u(t) + e^{2t} v_2, u(0) = v_1 - v_3$ zu finden. Gehen Sie dazu in folgenden Schritten vor:

(a) Berechnen Sie Av_1, Av_2, Av_3 und schreiben Sie die Ergebnisse als Linearkombinationen von v_1, v_2, v_3. Was kann man zu diesem Zeitpunkt über die Eigenwerte von A sagen?

(b) Bestimmen Sie einen weiteren Eigenwert von A und einen dazu gehörigen Eigenvektor v_4.

(c) $\mathscr{B} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ bildet eine Basis des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie ${}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$.

(d) Bestimmen Sie Fundamentallösungen $y_1(t), y_2(t), y_3(t), y_4(t)$ für das homogene DGsystem $y'(t) = A \cdot y(t)$. Bestimmen Sie damit eine allgemeine Lösung dieses DGsystems.

(e) (Nicht entscheidend für die Lösung des inhomogenen DGsystems, aber dennoch interessant:) Bestimmen Sie das asymptotische Verhalten von $\frac{e^{-t} y(t)}{t^2}$, d.h. berechnen Sie $\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t} y(t)}{t^2}$.

(f) Bestimmen Sie nun eine partikuläre Lösung des DGsystems $u'(t) = A \cdot u(t) + e^{2t} v_2$, $u(0) = v_1 - v_3$. Verwenden Sie dazu den Ansatz

$$u(t) = u_1(t) \cdot v_1 + u_2(t) \cdot v_2 + u_3(t) \cdot v_3 + u_4(t) \cdot v_4$$

mit $u_1(0) = 1, u_2(0) = 0, u_3(0) = -1, u_4(0) = 0$. Wie sieht damit die allgemeine Lösung dieses DGsystems aus?

(g) Bestimmen Sie zur Probe die Fundamentalmatrix $Y(t)$ und bestimmen Sie eine Lösung mit Hilfe der Lösungsformel für inhomogene lineare LGsysteme.

(h) Wie löst man $u'(t) = A \cdot u(t) + \mathrm{e}^{2t} w$ für beliebige Vektoren $w \in \mathbb{R}^4$?

2 Komplex kann so einfach sein!

Wiederum sei eine Matrix gegeben, nämlich

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das DGsystem $y'(t) = Ay(t)$ in den folgenden Schritten:

(a) Bestimmen Sie Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ und Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 der Matrix A. Was fällt auf?

(b) Bestimmen Sie ein komplexes und ein reelles Fundamentalsystem zur DG $y'(t) = Ay(t)$.

3 Matrizen für alle!

Aufgabe 3: Wir betrachten die homogene DG vierter Ordnung

$$y^{(4)} + 10y'' - 9y = 0.$$

a) Bestimmen Sie für den Vektor $z = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ y^{(3)} \end{pmatrix}$ eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$, sodass $z' = Az$, schreiben Sie die DG also in ein 4×4 DGsystem um.

b) Bestimmen Sie Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

c) Geben Sie eine allgemeine Lösung für $z(t)$ und eine allgemeine Lösung für $y(t)$ an.