Übungsblatt 4: Differentialgleichungen

Für die Prüfungsvorbereitung am 11. Februar 2016

1 Am Anfang war der Wert ... und die DG

Gegeben sind folgende Anfangswertprobleme:

(i) $2x(y^2+1)+2(x^2+1)y\cdot y'=0$ mit $y(0)=1$

(ii) $(x^2-1)\cdot y'+4xy=0$ mit $y(0)=1$

(iii) $-\cos(x)y'+\sin(x)y=\cos(x)$ mit $y(0)=0$

(a) Welche in der Vorlesung behandelten Eigenschaften besitzen obige Differentialgleichungen (implizite/explizite DG, separierbare/lineare/exakte DG, Ordnung der DG, ggf. homogene/inhomogene DG)? Oder sind obige DGen äquivalent zu einer separierbaren/linearen/exakten DG?

(b) Ist eine der obigen Differentialgleichungen separierbar, linear oder exakt, so lösen Sie sie allgemein (d.h. nicht als AWP) mit dem entsprechenden Lösungsverfahren der Vorlesung. Geben Sie das maximale Existenzintervall für den Anfangswert $y(x_0)=y_0$ an.

(c) Lösen Sie ebenso die zugehörigen Anfangswertprobleme

(i) einmal über Punktprobe mit der zuvor berechneten allgemeinen Lösung

(ii) und einmal direkt über die Formel der Vorlesung.

(d) Gewinnen Sie aus der DG $\sin((x^2+1)y\cdot y')=0$ eine separierbare Differentialgleichung, lösen Sie diese allgemein und bestimmen Sie das maximale Existenzintervall.

2 Nicht exakt, aber fast Gegeben sind folgende Anfangswertprobleme:

(i) $2x^2(y-1)+x(x^2+y)\cdot y'=0$ mit $y(0)=1$

(ii) $3xy(x+y)+(1-x^3)\cdot y'=0$ mit $y(0)=1$

Besitzen diese integrierende Faktoren $\lambda(x)$ bzw. $\mu(y)$? Falls ja, berechnen Sie diese und lösen Sie damit die Differentialgleichungen.

3 So mancher Ersatz ist besser als das Original

(a) Lösen Sie mittels Substitution die Differentialgleichung

$$y' = 4xy^2 - 8x^2y + 4x^3 + 1 = 4x(y-x)^2 + 1 \quad .$$

(b) Lösen Sie mittels der Substitution $v(x) = \frac{1}{y(x)}$ die Differentialgleichung

$$y' = -xy^2 - y \quad .$$

4 Auch eine homogene Lösung ist nicht überall gleich Gegeben sei die lineare Differentialgleichung

$$y^{(3)}(t) + y^{(2)}(t) - y'(t) - y(t) = b(t) \quad .$$

(a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und damit ein Fundamentalsystem der homogenen DG.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichung für $b(t) = 24t\mathrm{e}^{-t}$ mit einem geeigneten Ansatz.

(c) Lösen Sie die Differentialgleichung für $b(t) = 4(2t+1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ mit einem geeigneten Ansatz.

(d) Lösen Sie die Differentialgleichung für $b(t) = 4(2t+1)\sin(t)$ mittels Aufgabenteil (c).

(e) Lösen Sie die Differentialgleichung für $b(t) = 24t\mathrm{e}^{t}$ mit der Greenschen Lösungsformel.

(f) Lösen Sie die Differentialgleichung mit $b(t) = 12t\cosh(t)$ mit Hilfe der bisherigen Lösungen.

5 Reell und komplex - nicht gleich aber gleich einfach Bestimmen Sie die reellen und die komplexen Fundamentallösungen der Differentialgleichung

$$y'' + 4y = 1$$

und lösen sie das zugehörige reelle Anfangswertproblem mit $y(0) = 0$ und $y'(0) = 1$.

6 Und er sah, dass es gut war.
Machen Sie jeweils die Probe.