Übungsblatt 2: Fourier- und Laplacetransformation

Für die Prüfungsvorbereitung am 09. Februar 2016

1 Reihenweise Reihen - und zwar mit Fourier

(a) Bestimmen Sie die reellen Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion f mit $f(x) = \cosh(x)$ für $x \in [-\pi, \pi[$ mittels der Integralformel. Bestimmen Sie damit die komplexe Fourierreihe von f.

(b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten der 2π-periodischen Funktion g mit $g(x) = \sinh(x)$ für $x \in]-\pi, \pi]$ mittels der Integralformel. Bestimmen Sie damit die reelle Fourierreihe von g.

(c) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ mit Hilfe einer der berechneten Fourierreihen.

(d) Bestimmen Sie den Wert der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n+1)^2+1}$ mit Hilfe einer der berechneten Fourierreihen.

2 Fourier zum Mitnehmen

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, für } x \leq -1 \\ 1 - x^2 & \text{, für } -1 < x < 1 \\ 0 & \text{, für } 1 \leq x \end{cases} \quad .$$

Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f mittels der Integralformel.

(b) Das Anfangswertproblem $y'(x) = -x \cdot y(x)$, $y(0) = 1 \in \mathbb{R}$ hat die eindeutige Lösung $y(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \in L^2$. Bestimmen Sie deren Fouriertransformierte unter Verwendung der Transformationsregeln $\frac{\partial}{\partial x} f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\xi \hat{f}(\xi)$ und $x f(x) \circ\!\!-\!\!\bullet\ \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial \xi} \hat{f}(\xi)$.

3 Und einmal Laplace bitte!

(a) Bestimmen Sie die Laplacetransformierte $F(s)$ von $f(x) = \cos(x)^2$ mittels der Integralformel.

(b) Lösen Sie das Anfangswertproblem $y''(x) - 4y(x) = -8x$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$ mittels Laplacetransformation.