Übungsblatt 1: Integralsätze, mehrdimensionale Integration und Potentiale

Für die Prüfungsvorbereitung am 08. Februar 2016

1 Messen in Maßen

(a) Sei $M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x^2 + 2y^2 - 2 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\right\}$. Stellen Sie für $\operatorname{vol}_3(M)$ das Integral über den kartesischen Koordinaten auf.

(b) Es gilt $M = A \cup B$ mit Mengen $A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| 2x^2 + 2y^2 - 2 \leq z \leq 0\right\}$ und $B = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{1 - x^2 - y^2} \geq z > 0\right\}$. Bestimmen sie $\operatorname{vol}_3(A)$, $\operatorname{vol}_3(B)$ und damit $\operatorname{vol}_3(M)$. Welche Koordinaten eignen sich hierfür?

(c) Sei $N = \left\{(rt^2 \sin(s) - t, 2rt^2 \cos(s), 2t) \middle| r \in [0,1]; t \in [0,1]; s \in [-\pi, \pi)\right\}$. Um eine Vorstellung des Körpers N zu bekommen, betrachten Sie Schnitte von N mit waagrechten Ebenen, d.h. $t = \text{const}$. Bestimmen Sie das Volumen und die Oberfläche von N. (Hinweis: Sie können die Oberfläche in die Deckfläche A_1 und die Mantelfläche A_2 aufteilen. Die Mantelfläche können sie dabei nicht exakt bestimmen, hier reicht ein Integral.)

2 Das hat Potenzial

Gegeben sind folgende Vektorfelder:

(i) $f_1(x,y) = \left(xy - \frac{\sin(y+2)}{x}, x^2 - \cos(y+2)\ln(3x)\right)$ mit $G_1 = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$.

(ii) $f_2(x,y) = \left(2xy - \frac{\sin(y+2)}{x}, x^2 - \cos(y+2)\ln(3x)\right)$ mit $G_2 = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$.

(iii) $f_3(x,y) = \left(\frac{3}{x} + y, x\right)$ mit $G_3 = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

(iv) $$f_4(x,y,z) = \Big(-\cos(x - z^2) - 2\sin(xy)\cos(xy)yz,\ -2\sin(xy)\cos(xy)xz,\ 2z\cos(x - z^2) + \cos(xy)^2\Big) \text{ mit } G_4 = \mathbb{R}^3.$$

(a) Besitzt f_i ein Potential auf dem Gebiet G_i?

(b) Wenn ja, geben Sie ein Potential an.

3 Grün, grün , grün, sind alle ...

Sei $\gamma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $\gamma(t) = (2 + \sin(t)) \cdot (\cos(t), \sin(t))$, $f(x, y) = (2y, -x)$.

(a) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{ds}$.

(b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der von γ berandeten Fläche F.

(c) Bestimmen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{ds}$ mit $g(x, y) = (2y, x)$.

4 Wird Stokes doch noch sichtbar?

Sei $S = \left\{(x, y, z) \middle| z \leq 0; z^2 + 2x^2 + 3y^2 = 6\right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $f(x, y, z) = (z - xy\mathrm{e}^{yz}, -z - xy\mathrm{e}^{xz}, \mathrm{e}^{xz} + \mathrm{e}^{yz})$.

(a) Zeigen Sie, dass f das Vektorpotential $g(x, y, z) = (-y\mathrm{e}^{xz}, x\mathrm{e}^{yz}, z(x + y))$ hat, d.h. $\mathrm{rot}(g) = f$ gilt.

(b) Bestimmen Sie den Fluss $\int_S f(s) \bullet \mathrm{d}S$ von f nach unten (in negative z-Richtung).

5 Oder eher Gauß?

(a) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ die durch $\gamma(t) = (2 + \cos(8t)) \cdot (\cos(t), \sin(t))$ berandete Fläche. Bestimmen Sie das Flussintegral $\int_\gamma f(s) \times \mathrm{d}\gamma$ für $f(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2, -y^2\right)$.

(b) Sei $M = \{(2r\cos(t), 2r\sin(t), z) | r \in [0, 1]; t \in [0, 2\pi); z \in [-1, 1]\} \subseteq \mathbb{R}^3$ und $g(x, y, z) = \left(x^2 + y, x + y, 1 + z^2\right)$. Bestimmen Sie das Integral $\int_{\partial M} g(s) \bullet \mathrm{dS}$, wobei $\mathrm{dS} = \vec{n} \cdot |\mathrm{dS}|$ mit nach außen zeigenden Normalenvektor $\vec{n}$.

6 $\frac{\partial}{\partial x}$ Cauchy= $\frac{\partial}{\partial y}$ Riemann, aber $\frac{\partial}{\partial y}$ Cauchy = Cauch $\neq -\frac{\partial}{\partial x}$ Riemann

(a) Formulieren Sie die Cauchy-Riemann Gleichungen für eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

(b) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z-a}$ für $a \in \mathbb{R}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ ist.

(c) Folgern Sie aus der vorherigen Aufgabe, dass $g(z) = \frac{1}{z^3 - 2z^2 + z}$ holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ist.

(d) Berechnen Sie die Residuen von $g(z)$.

(e) Seien $\varphi_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \varphi_1(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \varphi_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \varphi_2(t) = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \varphi_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, \varphi_3(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2t} + 1$ drei Wege in der komplexen Ebene. Berechnen Sie $\int_{\varphi_i} g(z)dz$ für $i = 1, 2, 3$.

7 Gebrochen rational ist nicht komplex genug!

Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z^4-16}$.

(a) Berechnen Sie die Residuen von f.

(b) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz$.

(c) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}2z} dz$.

(d) Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cdot \sin(2z) dz$.

8 There's no substitute for you!

(a) Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(z)+2} dz$.

(b) Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin(z)+2} dz$.