Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Nutzen Sie die **Kästen** für Ihre Lösungen. Bei karierten Kästen sind Ergebnis und Rechenweg gefragt. Nebenrechnungen machen Sie auf Schmierpapier, das Sie nicht abgeben.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. *Tipp:* Sammeln Sie zunächst die für Sie leichten Punkte, und verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine für Sie schwierige Frage.
- Die Klausur enthält zu viele Punkte für 120 Minuten. Die Notenskala berücksichtigt dies. Ihr Vorteil: Sammeln Sie Punkte; wählen Sie zunächst Fragen, die Ihnen leicht fallen.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/9	/9	/13	/14	/14	/72

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

2A. Gibt es stetig differenzierbare Wege $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ mit unendlicher Länge?

Begründete Antwort:

$\overline{}$
2

2B. Wir integrieren $f(z) = 5/z - 7/z^2$ entlang des positiven Randes ∂R eines Rechtecks $R \subset \mathbb{C}$ mit $0 \notin \partial R$. Welche Werte kann das komplexe Wegintegral $\int_{\partial R} f(z)\,\mathrm{d}z$ annehmen?

Begründete Antwort:

$\overline{}$
2

2C. Sei $U = \{\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0\ \}$ der dreidimensionale euklidische Raum ohne die z–Achse. Hat jedes rotationsfreie Vektorfeld $f : U \to \mathbb{R}^3$, $\mathrm{rot}(f) = 0$, ein Potential $F : U \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

$\overline{}$
2

2D. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{1/k}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ die Fourier–Reihe einer quadrat-integrierbaren Funktion?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2E. Gibt es stetige Funktionen $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$, sodass die beiden iterierten Integrale $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ und $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ verschieden sind?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

2F. Gibt es stetige Funktionen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, sodass die beiden iterierten Integrale $\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$ und $\int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{1} f(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ verschieden sind?

Begründete Antwort:

$\overline{}$ 2

Aufgabe 3. *Der Residuensatz* (*2+2+2+3 = 9 Punkte*)

3A. Bestimmen Sie das Integral

$$F(x) = \int_{t=0}^{x} \frac{1}{t^2+4}\,\mathrm{d}t =$$

2

Hinweis: Das Ergebnis genügt. Die Probe ist leicht und fängt Rechenfehler ab.

3B. Bestimmen Sie mit der vorigen Aufgabe das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+4}\,\mathrm{d}x =$$

2

3C. Bestimmen Sie für $u \in \mathbb{C}$ das Residuum $\operatorname{res}_z\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}/(z^2+4)\big)$ in den Polstellen $z = \pm 2\mathrm{i}$:

$$\operatorname*{res}_{z=2\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+4}\right) = \qquad , \qquad \operatorname*{res}_{z=-2\mathrm{i}}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}uz}}{z^2+4}\right) =$$

2

3D. Berechnen Sie für $u \geq 0$ das Integral

$$\widehat{f}(u) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(ux)}{x^2+4}\,\mathrm{d}x =$$

3

Probe: Sie kennen $\widehat{f}(0)$ aus Frage 3B. Zudem gilt $\lim_{u\to\infty} \widehat{f}(u) = 0$ dank Riemann–Lebesgue.

Aufgabe 4. *Integralsätze in der Ebene (4+3+2 = 9 Punkte)*

4A. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s$ des Vektorfeldes $f(x,y) = (0, 3x)$ entlang des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) = (1 - \sin t) \cdot (\cos t, 2\sin t)$. *Hinweis:* Es gilt $2 \sin t \cos t = \sin(2t)$.

$$\int_\gamma f(s) \bullet \mathrm{d}s =$$

4

4B. Folgern Sie den Flächeninhalt $\mathrm{vol}_2(H)$ der vom Weg γ umschlossenen Fläche $H \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathrm{vol}_2(H) = \int_H 1 \, \mathrm{d}(x,y) =$$

3

4C. Berechnen Sie das Arbeitsintegral $\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s$ des Vektorfeldes $g(x,y) = (-3y, 2x)$.

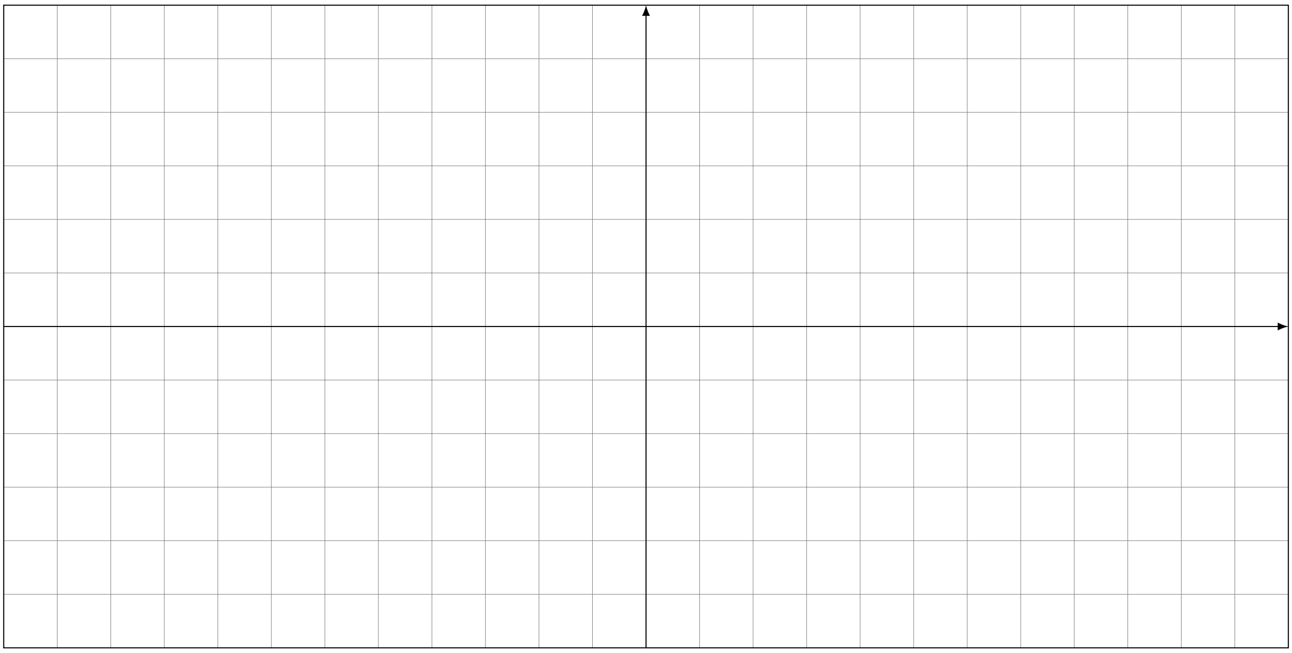
$$\int_\gamma g(s) \bullet \mathrm{d}s =$$

2

Aufgabe 5. *Fourier–Reihen* (*1+2+3+1+3+3 = 13 Punkte*)

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2π–periodisch mit $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$ für $-\pi \le x < \pi$.

5A. Skizzieren Sie die Funktion f auf dem Intervall $[-12, 12]$:



1

5B. Finden Sie den Grenzwert der Fourier–Reihe $f_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$ in $x = 0$ und $x = \pi$:

$\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) =$ $\boxed{}$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\pi) =$ $\boxed{}$ 2

5C. Bestimmen Sie die Koeffizienten der komplexen Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$:

$c_k =$

3

5D. Bestimmen Sie die Koeffizienten der Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$:

$a_k = \boxed{}$ und $b_k = -\dfrac{k}{2} a_k$ (zur Probe)

1

5E. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4+k^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{8} + \frac{1}{13} + \frac{1}{20} + \frac{1}{29} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{}$ ergibt:

3

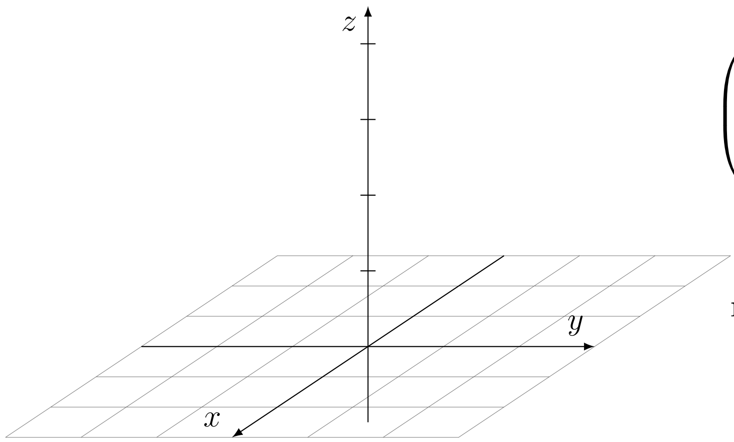
5F. Bestimmen Sie durch Auswertung der Fourier–Reihe an einer geeigneten Stelle den Wert $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4+k^2} = -\frac{1}{5} + \frac{1}{8} - \frac{1}{13} + \frac{1}{20} - \frac{1}{29} + \dots$. Auswertung an der Stelle $x = \boxed{}$ ergibt:

3

Aufgabe 6. *Flächen im Raum und der Satz von Stokes (3+2+4+5 = 14 Punkte)*

6A. Skizzieren und parametrisieren Sie das Rotationsparaboloid

$$S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le z = 4 - x^2 - y^2 \right\}.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \begin{cases} 0 \le \rho \le \boxed{\qquad\qquad} \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$$

3

6B. Berechnen Sie die Flächennormale

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \times \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix}.$$

2

6C. Berechnen Sie den Flächeninhalt der Fläche S:

$\mathrm{vol}_2(S) =$

4

Plausibilitätscheck: Die Skizze suggeriert $30 < \mathrm{vol}_2(S) < 40$. Es gilt $17^{3/2} \approx 70$.

6D. Berechnen Sie den Fluss $\int_S f \bullet \mathrm{d}S$ des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \underbrace{\begin{pmatrix} 2y\,\mathrm{e}^{xz} \\ 5x\,\mathrm{e}^{yz} \\ \mathrm{e}^{xy} \end{pmatrix}}_{=:g} = \begin{pmatrix} +x\,\mathrm{e}^{xy} - 5xy\,\mathrm{e}^{yz} \\ -y\,\mathrm{e}^{xy} + 2xy\,\mathrm{e}^{xz} \\ 5\,\mathrm{e}^{yz} - 2\,\mathrm{e}^{xz} \end{pmatrix}$$

durch die Fläche S nach oben (in positive z–Richtung). Nutzen Sie hierzu ein Wegintegral.

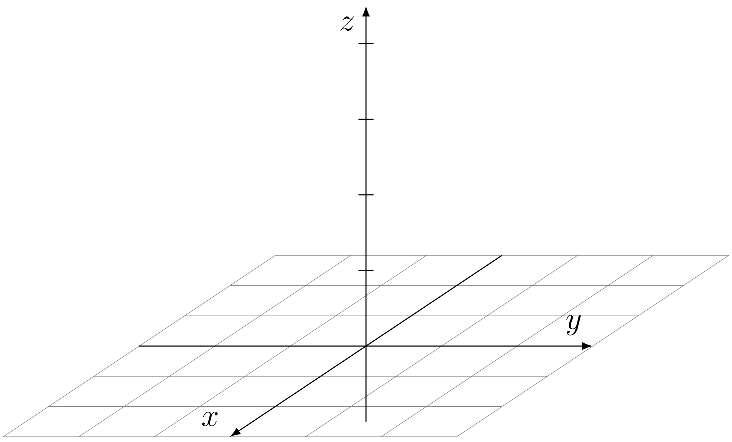
$$\int_{s\in S} f(s) \bullet \mathrm{d}S =$$

$\overline{}$
5

Aufgabe 7. *Dreidimensionale Körper und der Satz von Gauß (3+3+3+3+2 = 14 Punkte)*

7A. Skizzieren und parametrisieren Sie den Halbzylinder

$$K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 4,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 4 \right\}.$$



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} \rho \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\varphi \\ \rho\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{} \leq \rho \leq \boxed{}$

$\boxed{} \leq \varphi \leq \boxed{}$

$0 \leq z \leq 4$

3

7B. Berechnen Sie auf K die Quellstärke des Vektorfeldes $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 7y + z^3 + 4xy^2 \\ 4x - y - \pi z + 4yx^2 \\ e^{-x^2/2} \cdot e^{-y^2/2} \end{pmatrix}.$$

$$\int_K \operatorname{div} f(x, y, z)\, \mathrm{d}(x, y, z) =$$

3

7C. Berechnen Sie den Fluss von f aus K durch den Deckel $D = \{\ (x,y,z) \in K \mid z = 4\ \}$:

$$\int_{s\in D} f(s) \bullet \mathrm{d}S$$

3

7D. Bestimmen Sie für das Randflächenstück $Q = \{\ (x,y,z) \in K \mid y = 0\ \}$

den Schwerpunkt $m_Q = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}$,

den senkrechten Feldanteil $f\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \bullet n_Q\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \boxed{}$,

und hiermit das Flussintegral $\int_Q f \bullet \mathrm{d}S = \int_Q f \bullet n_Q |\mathrm{d}S| = \boxed{}$.

3

7E. Folgern Sie für die Mantelfläche $M = \{\ (x,y,z) \in K \mid x^2 + y^2 = 4\ \}$

das Flussintegral $\int_M f \bullet \mathrm{d}S = \boxed{}$.

2