Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Bei Multiple-Choice-Fragen (Aufgabe 2) gibt es Punkte für jede richtige Antwort, keine Punkte bei fehlender Antwort, und negative Punkte für jede falsche Antwort (im Mittel jeweils 0). Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/18	/13	/9	/10	/8	/8	/8	/75

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (*18 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

2A. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2B. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2C. Jede kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2D. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^n$ sind äquivalent. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Jeder lokal-kompakte Raum ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Jeder kompakte Raum ist lokal-kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Jeder lokal-kompakte Hausdorff–Raum ist ein Baire–Raum. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Baire–Raum. ☐ Ja ☐ Nein

2K. Jedes Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ kompakter Räume X_i ist kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2L. Jedes Produkt zusammenhängender Räume ist zusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2M. Jeder zusammenhängende Raum ist wegzusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2N. Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend. ☐ Ja ☐ Nein

2O. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$. ☐ Ja ☐ Nein

2P. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$. ☐ Ja ☐ Nein

2Q. Haben zwei endliche Simplizialkomplexe K, L homöomorphe Polyeder $|K| \cong |L|$, so haben sie dieselbe Euler–Charakteristik $\chi(K) = \chi(L)$. ☐ Ja ☐ Nein

2R. Haben zwei endliche Simplizialkomplexe K, L dieselbe Euler–Charakteristik $\chi(K) = \chi(L)$, so haben sie homöomorphe Polyeder $|K| \cong |L|$. ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit (2+4+4+3 = 13 Punkte)*

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $B \subset Y$ kompakt. Ist dann auch $f^{-1}(B) \subset X$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3B. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3C. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt, Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

3D. Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch. Kann eine echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ kompakt sein?

☐ Ja ☐ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

Aufgabe 4. *Kompaktifizierung* (*3+2+1+3 = 9 Punkte*)

4A. Im Ball $\mathbb{D}^n$ schlagen wir die Randsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ zu einem Punkt zusammen. Geben Sie zum Quotienten $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^m$ an, sowie eine stetige Abbildung $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^m$, die eine Bijektion $\bar{h} : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \to X$ induziert.

4B. Warum ist die stetige Bijektion $\bar{h}$ in der vorigen Konstruktion ein Homöomorphismus?

4C. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal-kompakter Hausdorff–Raum. Sei $\infty \notin X$ ein Punkt und $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Geben Sie die Alexandroff–Topologie $\hat{\mathcal{T}}$ auf $\hat{X}$ an. Zur Erinnerung: Dies ist die einzige Topologie auf der Menge $\hat{X}$, für die $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ ein kompakter Hausdorff–Raum mit Teilraum $(X, \mathcal{T})$ ist.

4D. Sei $X = \mathbb{B}^n$ der offene Einheitsball und $\hat{X} = \mathbb{B}^n \cup \{\infty\}$ seine Alexandroff–Kompaktifizierung. Geben Sie zum Raum $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ einen homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^m$ an, sowie eine Einbettung $\kappa : \mathbb{B}^n \to Y$ mit $Y = \kappa(\mathbb{B}^n) \cup \{\text{Punkt}\}$. Warum ist $\hat{\kappa} : \hat{X} \to Y$ ein Homöomorphismus?

Aufgabe 5. *Zusammenhang (2+3+3+2 = 10 Punkte)*

5A. Sei $f : X \to Y$ stetig, $B \subset Y$ zusammenhängend. Ist dann auch $f^{-1}(B)$ zusammenhängend?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

5B. Sei $f : X \to Y$ stetig, $A \subset X$ zusammenhängend. Ist dann auch $f(A)$ zusammenhängend?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

5C. Ist die Gruppe $\mathrm{GL}_2 \mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; ad - bc \neq 0 \right\}$ zusammenhängend?

☐ Ja ☐ Nein. Begründung:

5D. Wenn in X jede Zusammenhangskomponente einelementig ist, ist X dann diskret?

☐ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Aufgabe 6. *Wegzusammenhang* (*2+2+2+2 = 8 Punkte*)

6A. Definieren Sie zu gegebenen Wegen $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ ihre Verknüpfung $\gamma = \alpha * \beta : [0,1] \to X$. Warum ist die so definierte Abbildung γ stetig?

6B. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich a. Konstruieren Sie zwischen $x, y \in X$ einen Weg in X.

6C. Sei $n \geq 1$. Konstruieren Sie zwischen je zwei Punkten $x, y \in \mathbb{S}^n$ einen Weg $\gamma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{S}^n$.

6D. Wir betrachten die unitäre Gruppe $\mathrm{U}_n = \left\{ A \in \mathbb{C}^{n\times n} \,\middle|\, \overline{A}^\top A = A\overline{A}^\top = 1_{n\times n} \right\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$. Jede Matrix $A \in \mathrm{U}_n$ ist unitär diagonalisierbar: Es existiert $T \in \mathrm{U}_n$ mit $T^{-1}AT = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$. Konstruieren Sie einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{U}_n$ von A nach $1_{n\times n}$.

Aufgabe 7. *Homotopie (1+3+1+3 = 8 Punkte)*

7A. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind *homotop*, geschrieben $f \simeq g$, wenn…

7B. Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ stetig und $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Sind dann f und g homotop?

☐ Ja ☐ Nein. Homotopie oder Gegenargument:

7C. Zwei Räume X, Y sind *homotopie-äquivalent*, geschrieben $X \simeq Y$, wenn…

7D. Sind die Räume $X = \mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}$ und $Y = \mathbb{S}^{n-1}$ homotopie-äquivalent?

☐ Ja ☐ Nein. Homotopie-Äquivalenz oder Gegenargument:

Aufgabe 8. *Komplexe und Euler–Charakteristik* (*2+2+2+2 = 8 Punkte*)

8A. Sei $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der n–dimensionale Standardsimplex. Bestimmen Sie die Anzahl f_d seiner d–dimensionalen Seiten sowie seine Euler–Charakteristik $\chi = \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d$.

8B. Bestimmen Sie zu Δ^n das Poincaré–Polynom $P(t) := \sum_{d=0}^{n} f_d t^d$ in geschlossener Form. (Sie können das Ergebnis an der Stelle $t = -1$ mit $P(-1) = \chi(\Delta^n)$ überprüfen.)

8C. Sei $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ der n–dimensionale Einheitswürfel. Bestimmen Sie die Anzahl f_d seiner d–dimensionalen Seiten sowie seine Euler–Charakteristik $\chi = \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d$.

8D. Bestimmen Sie zu $[0,1]^n$ das Poincaré–Polynom $P(t) := \sum_{d=0}^{n} f_d t^d$ in geschlossener Form. (Sie können das Ergebnis an der Stelle $t = -1$ mit $P(-1) = \chi([0,1]^n)$ überprüfen.)