Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Bei Multiple-Choice-Fragen (Aufgabe 2) gibt es Punkte für jede richtige Antwort, keine Punkte bei fehlender Antwort, und negative Punkte für jede falsche Antwort (im Mittel jeweils 0). Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/18	/13	/9	/10	/8	/8	/8	/75

Vorwort zur Musterlösung: Diese Klausur dient als Zwischenbilanz zur Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Definitionen und Sätze, Beispiele und Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung, auch einfache Beweise. Die Fragen sind zahlreich aber leicht. Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften* (*18 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

	Ja	Nein
2A. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt.	X	
2B. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen.	X	
2C. Jede kompakte Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist beschränkt und abgeschlossen.	X	
2D. Jede beschränkte und abgeschlossene Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt.	X	
2E. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{R}$–Vektorraum $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent.	X	
2F. Je zwei Normen auf dem $\mathbb{Q}$–Vektorraum $\mathbb{Q}^n$ sind äquivalent.		X
2G. Jeder lokal-kompakte Raum ist kompakt.		X
2H. Jeder kompakte Raum ist lokal-kompakt.		X
2I. Jeder lokal-kompakte Hausdorff–Raum ist ein Baire–Raum.	X	
2J. Jeder vollständig metrisierbare Raum ist ein Baire–Raum.	X	
2K. Jedes Produkt $\prod_{i \in I} X_i$ kompakter Räume X_i ist kompakt.	X	
2L. Jedes Produkt zusammenhängender Räume ist zusammenhängend.	X	
2M. Jeder zusammenhängende Raum ist wegzusammenhängend.		X
2N. Jeder wegzusammenhängende Raum ist zusammenhängend.	X	
2O. Ist $A \subset X$ zusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$.	X	
2P. Ist $A \subset X$ wegzusammenhängend, so auch der Abschluss $\overline{A} \subset X$.		X
2Q. Haben zwei endliche Simplizialkomplexe K, L homöomorphe Polyeder $\lvert K\rvert \cong \lvert L\rvert$, so haben sie dieselbe Euler–Charakteristik $\chi(K) = \chi(L)$.	X	
2R. Haben zwei endliche Simplizialkomplexe K, L dieselbe Euler–Charakteristik $\chi(K) = \chi(L)$, so haben sie homöomorphe Polyeder $\lvert K\rvert \cong \lvert L\rvert$.		X

Aufgabe 3. *Kompaktheit (2+4+4+3 = 13 Punkte)*

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $B \subset Y$ kompakt. Ist dann auch $f^{-1}(B) \subset X$ kompakt?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

▶ Jede Abbildung $f : X \to \{*\}$ von einem nicht-kompakten Raum X auf $B = \{*\}$.

Weitere Gegenbeispiele sind die Projektionsabbildung $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $p(x, y) = x$ und $B = \{*\}$ oder die Inklusion $[0, 1]_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow [0, 1]$ mit $B = [0, 1]$. Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt…

3B. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung in Y.
▶ Da f stetig ist, ist $U_i = f^{-1}(V_i)$ offen für jedes $i \in I$.
Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ in X.
▶ Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.
▶ Aus $f(U_i) \subset V_i$ folgt $f(A) \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.

3C. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt, Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Sei $A \subset X$ abgeschlossen.
▶ Da X kompakt ist, ist A kompakt (2A).
▶ Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (3B).
▶ Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (2B).

Erläuterung: Ist $f : X \to Y$ hier zudem bijektiv, so ist f ein Homöomorphismus.

3D. Sei $(X, \mathcal{T})$ hausdorffsch. Kann eine echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ kompakt sein?

☐ Ja ☒ Nein. Beispiel oder Gegenargument:

▶ Wegen $\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}$ ist die identische Abbildung $\mathrm{id} : (X, \mathcal{T}') \to (X, \mathcal{T})$ stetig.
▶ Ist $(X, \mathcal{T}')$ kompakt, so ist id ein Homöomorphismus (3C), also $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$.

Erläuterung: Auf jeder Menge X gibt es (verschiedene) kompakte hausdorffsche Topologien $\mathcal{T}$. Jede echt feinere Topologie $\mathcal{T}' \supsetneq \mathcal{T}$ ist hausdorffsch, aber nicht kompakt. Jede echt gröbere Topologie $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$ ist kompakt, aber nicht hausdorffsch.

Aufgabe 4. *Kompaktifizierung* (*3+2+1+3 = 9 Punkte*)

4A. Im Ball $\mathbb{D}^n$ schlagen wir die Randsphäre $\mathbb{S}^{n-1}$ zu einem Punkt zusammen. Geben Sie zum Quotienten $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^m$ an, sowie eine stetige Abbildung $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^m$, die eine Bijektion $\bar{h} : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \to X$ induziert.

▶ Der Quotient $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ ist homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. ▶▶ Dies sieht man anhand der Abbildung $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ mit $h(rs) = (\cos(\pi r), \sin(\pi r)s)$ wobei $r \in [0,1]$ und $s \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Erläuterung: Die Abbildung h ist wohldefiniert und stetig, ihr Bild ist $\mathbb{S}^n$, sie ist injektiv auf $\mathbb{B}^n$ und wirft $\mathbb{S}^{n-1}$ auf $(-1, 0, \dots, 0)$. Somit induziert h eine stetige Bijektion $\bar{h} : \mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{S}^n$.

Alternativ $h : \mathbb{D}^n \to \mathbb{R}^n \cup \{\infty\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n$ mit $h(x) = x/(1 - |x|)$ und stereographischer Projektion.

4B. Warum ist die stetige Bijektion $\bar{h}$ in der vorigen Konstruktion ein Homöomorphismus?

▶ Der Raum $\mathbb{D}^n$ ist kompakt (2D), somit auch der Quotient $\mathbb{D}^n /\!\!/ \mathbb{S}^{n-1}$ (3B).
Der euklidische Raum $\mathbb{R}^{n+1}$ ist hausdorffsch, somit auch der Teilraum $\mathbb{S}^n$.
▶ Die stetige Bijektion $\bar{h}$ ist abgeschlossen (3C), also ein Homöomorphismus.

4C. Sei $(X, \mathcal{T})$ ein lokal-kompakter Hausdorff–Raum. Sei $\infty \notin X$ ein Punkt und $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$. Geben Sie die Alexandroff–Topologie $\hat{\mathcal{T}}$ auf $\hat{X}$ an. Zur Erinnerung: Dies ist die einzige Topologie auf der Menge $\hat{X}$, für die $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ ein kompakter Hausdorff–Raum mit Teilraum $(X, \mathcal{T})$ ist.

$$▶ \quad \hat{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \cup \{\, \hat{X} \setminus K \mid K \subset X \text{ kompakt} \,\}$$

Erläuterung: Da X hausdorffsch ist, ist K automatisch abgeschlossen (2B).

4D. Sei $X = \mathbb{B}^n$ der offene Einheitsball und $\hat{X} = \mathbb{B}^n \cup \{\infty\}$ seine Alexandroff–Kompaktifizierung. Geben Sie zum Raum $(\hat{X}, \hat{\mathcal{T}})$ einen homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^m$ an, sowie eine Einbettung $\kappa : \mathbb{B}^n \to Y$ mit $Y = \kappa(\mathbb{B}^n) \cup \{\text{Punkt}\}$. Warum ist $\hat{\kappa} : \hat{X} \to Y$ ein Homöomorphismus?

▶ Es gilt $X \cong \mathbb{S}^n$. ▶ Wir nutzen die Einbettung $\kappa = h|_{\mathbb{B}^n} : \mathbb{B}^n \hookrightarrow \mathbb{D}^n \to \mathbb{S}^n$ aus Aufgabe 4A. (Alternativ $\kappa : \mathbb{B}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^n \setminus \{\text{Punkt}\} \hookrightarrow \mathbb{S}^n$ mittels stereographischer Projektion.)

▶ Die Fortsetzung von κ zu $\hat{\kappa} : \hat{X} \to Y$ durch $\infty \mapsto -e_1$ ist eine Bijektion,
und ein Homöomorphismus dank der universellen Eigenschaft (4C) der Alexandroff–Topologie.

Aufgabe 5. *Zusammenhang (2+3+3+2 = 10 Punkte)*

5A. Sei $f : X \to Y$ stetig, $B \subset Y$ zusammenhängend. Ist dann auch $f^{-1}(B)$ zusammenhängend?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

▶ Jede Abbildung $f : X \to \{*\}$ von einem nicht-zusammenhängenden Raum X auf $B = \{*\}$.

Weitere Gegenbeispiele sind die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $B = \{1\}$ oder die Inklusion $[0,1]_{\mathbb{Q}} \hookrightarrow [0,1]$ mit $B = [0,1]$. Der Phantasie sind keine Grenzen gesetzt…

5B. Sei $f : X \to Y$ stetig, $A \subset X$ zusammenhängend. Ist dann auch $f(A)$ zusammenhängend?

☒ Ja ☐ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

▶ Ist $f(A) = U \sqcup V$ eine offene Zerlegung in $f(A)$, so auch $A = f|_A^{-1}(U) \sqcup f|_A^{-1}(V)$ in A.
▶ Ist A zusammenhängend, so folgt $f|_A^{-1}(U) = \emptyset$ oder $f|_A^{-1}(V) = \emptyset$, also $U = \emptyset$ oder $V = \emptyset$.
Somit ist auch $f(A)$ zusammenhängend.

5C. Ist die Gruppe $\mathrm{GL}_2\mathbb{R} = \left\{ \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{2\times 2} \;\middle|\; ad - bc \neq 0 \right\}$ zusammenhängend?

☐ Ja ☒ Nein. Begründung:

▶ Die Determinante $\det : \mathrm{GL}_2\mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ mit $\det\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) = ad - bc$ ist stetig.
▶ Wegen $\det\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = a$ ist das Bild ganz $\mathbb{R}^*$, also nicht zusammenhängend.
Demnach ist $\mathrm{GL}_2\mathbb{R}$ nicht zusammenhängend, dank Kontraposition von 5B.

Erläuterung: Dank Gauß–Algorithmus gilt $\mathcal{Z}(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}) = \pi_0(\mathrm{GL}_n\mathbb{R}) = \{\mathrm{GL}_n^+\mathbb{R}, \mathrm{GL}_n^-\mathbb{R}\}$, denn die beiden offenen Mengen $\mathrm{GL}_n^\pm\mathbb{R} = \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} \mid \det(A) \gtrless 0 \}$ sind (weg)zusammenhängend.

5D. Wenn in X jede Zusammenhangskomponente einelementig ist, ist X dann diskret?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel: ▶ $\mathbb{Q}$

Erläuterung: Der Raum $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ ist nicht diskret, dennoch ist jede Zusammenhangskomponente einelementig. Weitere Gegenbeispiele dieser Art sind $\mathbb{R} \smallsetminus \mathbb{Q}$ und die Cantor–Menge $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Solche Räume nennt man *total-unzusammenhängend*. Kurzum: Jeder diskrete Raum, wie etwa $\mathbb{Z}$, ist total-unzusammenhängend, aber nicht jeder total-unzusammenhängende Raum ist diskret.

Aufgabe 6. *Wegzusammenhang* (*2+2+2+2 = 8 Punkte*)

6A. Definieren Sie zu gegebenen Wegen $\alpha, \beta : [0,1] \to X$ mit $\alpha(1) = \beta(0)$ ihre Verknüpfung $\gamma = \alpha * \beta : [0,1] \to X$. Warum ist die so definierte Abbildung γ stetig?

▶ Der verknüpfte Weg ist definiert durch $\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & \text{für } 0 \le t \le 1/2, \\ \beta(2t-1) & \text{für } 1/2 \le t \le 1. \end{cases}$

▶ Dies ist stetig dank Verklebesatz. *Erläuterung:* In $[0,1]$ sind $[0, 1/2]$ und $[1/2, 1]$ abgeschlossen, die Abbildung $t \mapsto \alpha(2t)$ ist stetig auf $[0, 1/2]$, die Abbildung $t \mapsto \beta(2t-1)$ ist stetig auf $[1/2, 1]$, und auf dem Durchschnitt $\{\frac{1}{2}\}$ stimmen beide überein dank $\alpha(1) = \beta(0)$.

6B. Sei $X \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich a. Konstruieren Sie zwischen $x, y \in X$ einen Weg in X.

▶ Die Wege $\alpha(t) = (1-t)x + ta$ und $\beta(t) = (1-t)a + ty$ verlaufen in X.
▶ Der verknüpfte Weg $\gamma = \alpha * \beta$ läuft in X von x über a nach y.

Erläuterung: Ist X sogar konvex, so können wir den direkten Weg $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ nutzen. Für sternförmige Mengen ist dies im Allgemeinen nicht möglich, wie man sich leicht ausmalt.

6C. Sei $n \ge 1$. Konstruieren Sie zwischen je zwei Punkten $x, y \in \mathbb{S}^n$ einen Weg $\gamma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{S}^n$.

▶ Für $n = 1$ nutzen wir Polarkoordinaten $x = e^{i\varphi}$ und $y = e^{i\psi}$ und setzen $\gamma_{x,y}(t) = e^{i[(1-t)\varphi + t\psi]}$.
▶ Für $n \ge 2$ liegen x, y in einer Ebene $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$. (Diese ist eindeutig falls $x \ne \pm y$.)
Den Weg von x nach y in $E \cap \mathbb{S}^n \cong \mathbb{S}^1$ konstruieren wir nun wie zuvor im Fall $n = 1$.

Alternative Konstruktion: Für $x \ne -y$ genügt der Weg $\gamma_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ mit $\gamma_{x,y}(t) = \frac{(1-t)x+ty}{|(1-t)x+ty|}$.
Andernfalls wählen wir $z \in \mathbb{S}^n \smallsetminus \{\pm x\}$ und verbinden x über z mit y durch $\gamma_{x,z} * \gamma_{z,y}$.

6D. Wir betrachten die unitäre Gruppe $\mathrm{U}_n = \left\{ A \in \mathbb{C}^{n\times n} \;\middle|\; \overline{A}^{\intercal} A = A \overline{A}^{\intercal} = 1_{n\times n} \right\} \subset \mathbb{C}^{n\times n}$. Jede Matrix $A \in \mathrm{U}_n$ ist unitär diagonalisierbar: Es existiert $T \in \mathrm{U}_n$ mit $T^{-1}AT = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ und Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{S}^1$. Konstruieren Sie einen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{U}_n$ von A nach $1_{n\times n}$.

▶▶ Der Weg $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $\gamma(t) = T \operatorname{diag}(\gamma_{\lambda_1,1}(t), \dots, \gamma_{\lambda_n,1}(t))\, T^{-1}$ tut's.

Erläuterung: Diese Abbildung ist stetig, also ein Weg in $\mathbb{C}^{n\times n}$. Dieser Weg verläuft tatsächlich in der Gruppe U_n, denn die drei Matrizen sind unitär und somit auch ihr Produkt. Wie gewünscht gilt $\gamma(0) = T \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\, T^{-1} = A$ und $\gamma(1) = T \operatorname{diag}(1, \dots, 1)\, T^{-1} = 1_{n\times n}$.

Aufgabe 7. *Homotopie* (*1+3+1+3 = 8 Punkte*)

7A. Zwei stetige Abbildungen $f, g : X \to Y$ sind *homotop*, geschrieben $f \simeq g$, wenn...

▶ eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times X \to Y$ existiert mit $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

Erläuterung: Letzteres bedeutet $H(0,x) = f(x)$ und $H(1,x) = g(x)$ für alle $x \in X$.
Eine solche Abbildung H nennt man eine *Homotopie* von f nach g.

7B. Seien $f, g : X \to \mathbb{S}^n$ stetig und $f(x) \neq -g(x)$ für alle $x \in X$. Sind dann f und g homotop?

[X] Ja [ ] Nein. Homotopie oder Gegenargument:

▶▶ Eine Homotopie $H : [0,1] \times X \to \mathbb{S}^n$ von f nach g ist gegeben durch

$$H(t,x) = \frac{(1-t)f(x) + tg(x)}{|(1-t)f(x) + tg(x)|}.$$

Erläuterung: Wegen $f(x) \neq -g(x)$ ist der Nenner niemals Null und somit H wohldefiniert.
Als Verkettung stetiger Funktionen ist H dann stetig. Schließlich gilt $H_0 = f$ und $H_1 = g$.

7C. Zwei Räume X, Y sind *homotopie-äquivalent*, geschrieben $X \simeq Y$, wenn...

▶ es stetige Abbildungen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ gibt mit $g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$ und $f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y$.

Erläuterung: In diesem Falle nennt man $(f, g) : X \simeq Y$ eine *Homotopie-Äquivalenz*
und die stetigen Abbildungen f, g heißen zueinander *homotopie-invers*.

7D. Sind die Räume $X = \mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}$ und $Y = \mathbb{S}^{n-1}$ homotopie-äquivalent?

[X] Ja [ ] Nein. Homotopie-Äquivalenz oder Gegenargument:

▶ Wir nutzen $f : \mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{S}^{n-1}$ mit $f(x) = x/|x|$ und die Inklusion $g : \mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}$.
▶ Es gilt $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{S}^{n-1}}$ und $g \circ f \simeq \mathrm{id}_{\mathbb{D}^n \smallsetminus \{0\}}$ vermöge der Homotopie $H : [0,1] \times X \to X$ mit

$$H(t,x) = (1-t)\, x/|x| + tx.$$

Erläuterung: Dies zeigt sogar, dass $\mathbb{S}^{n-1} \subset \mathbb{D}^n$ ein starker Deformationsretrakt ist.

Aufgabe 8. *Komplexe und Euler–Charakteristik (2+2+2+2 = 8 Punkte)*

8A. Sei $\Delta^n = [e_0, e_1, \dots, e_n] \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der n–dimensionale Standardsimplex. Bestimmen Sie die Anzahl f_d seiner d–dimensionalen Seiten sowie seine Euler–Charakteristik $\chi = \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d$.

▶ Es gilt $f_d = \binom{n+1}{d+1}$.

▶ Wie für jedes konvexe kompakte Polyeder gilt $\chi = 1$. (Euler–Poincaré)

Erläuterung: Jede d–dimensionale Seite entspricht der Auswahl von $d+1$ der $n+1$ Ecken. Man kann $\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d = 1$ auch direkt ausrechnen wie in der folgenden Aufgabe.

8B. Bestimmen Sie zu Δ^n das Poincaré–Polynom $P(t) := \sum_{d=0}^{n} f_d t^d$ in geschlossener Form. (Sie können das Ergebnis an der Stelle $t = -1$ mit $P(-1) = \chi(\Delta^n)$ überprüfen.)

▶▶ Einsetzen und die binomische Formel ergibt:

$$P(t) = \sum_{d=0}^{n} f_d t^d = \sum_{d=0}^{n} \binom{n+1}{d+1} t^d = t^{-1}\Big(-1 + \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k\Big) = \Big((1+t)^{n+1} - 1\Big)/t$$

Erläuterung: Tatsächlich gilt $P(-1) = 1$, wie geometrisch vorhergesagt.

8C. Sei $[0,1]^n \subset \mathbb{R}^n$ der n–dimensionale Einheitswürfel. Bestimmen Sie die Anzahl f_d seiner d–dimensionalen Seiten sowie seine Euler–Charakteristik $\chi = \sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d$.

▶ Es gilt $f_d = \binom{n}{n-d} 2^{n-d}$.

▶ Wie für jedes konvexe kompakte Polyeder gilt $\chi = 1$. (Euler–Poincaré)

Erläuterung: Jede d–dimensionale Seite entspricht der Wahl $1 \le k_1 < k_2 < \dots < k_{n-d} \le n$ von $n-d$ der n möglichen Richtungen sowie der Koordinaten $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_{n-d}} \in \{0,1\}$. Man kann $\sum_{d=0}^{n} (-1)^d f_d = 1$ auch direkt ausrechnen wie in der folgenden Aufgabe.

8D. Bestimmen Sie zu $[0,1]^n$ das Poincaré–Polynom $P(t) := \sum_{d=0}^{n} f_d t^d$ in geschlossener Form. (Sie können das Ergebnis an der Stelle $t = -1$ mit $P(-1) = \chi([0,1]^n)$ überprüfen.)

▶▶ Einsetzen und die binomische Formel ergibt:

$$P(t) = \sum_{d=0}^{n} f_d t^d = \sum_{d=0}^{n} \binom{n}{n-d} 2^{n-d} t^d = (2+t)^n$$

Erläuterung: Tatsächlich gilt $P(-1) = 1$, wie geometrisch vorhergesagt.