

Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Bei Multiple-Choice-Fragen (Aufgabe 2) gibt es Punkte für jede richtige Antwort, keine Punkte bei fehlender Antwort, und negative Punkte für jede falsche Antwort (im Mittel jeweils 0). Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/18	/10	/10	/12	/12	/12	/75

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (18 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

- 2A.** Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} / (2k)!$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$? Ja Nein
- 2B.** Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} / (2k)!$ gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} ? Ja Nein
- 2C.** Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. Ja Nein
- 2D.** Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$. Ja Nein
- 2E.** Die Abbildung $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv. Ja Nein
- 2F.** Die Abbildung $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto f|_{\mathbb{Q}}$ ist surjektiv. Ja Nein
- 2G.** Jede Topologie wird von mindestens einer Metrik induziert. Ja Nein
- 2H.** Jede Topologie wird von höchstens einer Metrik induziert. Ja Nein
- 2I.** Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert das zweite. Ja Nein
- 2J.** Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste. Ja Nein
- 2K.** Jeder normierte \mathbb{R} -Vektorraum ist zweitabzählbar. Ja Nein
- 2L.** Jeder separable metrisierbare Raum ist zweitabzählbar. Ja Nein
- 2M.** Jeder metrisierbare Raum ist erstabzählbar und hausdorffsch. Ja Nein
- 2N.** Jeder zweitabzählbare reguläre $(T_1 \& T_3)$ Raum ist metrisierbar. Ja Nein
- 2O.** Jeder Teilraum eines Hausdorff-Raums ist hausdorffsch. Ja Nein
- 2P.** Jeder Quotientenraum eines Hausdorff-Raums ist hausdorffsch. Ja Nein
- 2Q.** Die Summentopologie auf $X \sqcup Y$ besteht genau aus den Vereinigungen $U \sqcup V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. Ja Nein
- 2R.** Die Produkttopologie auf $X \times Y$ besteht genau aus den Produkten $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen. Ja Nein

Aufgabe 3. Produkte (2+2+3+3=10 Punkte)

3A. Seien (X_i, \mathcal{T}_i) topologische Räume, $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt und $p_i : X \rightarrow X_i$ die kanonischen Projektionen. Definieren Sie die Produkttopologie \mathcal{T} auf X durch eine Basis \mathcal{B} :

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{l} \phantom{ \prod_{i \in I} U_i } \\ \phantom{ \prod_{i \in I} U_i } \\ \phantom{ \prod_{i \in I} U_i } \end{array} \right\}$

3B. Welche universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert die Produkttopologie?

3C. Ist der Produktraum $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ metrisierbar?

Ja Nein. Metrik oder Gegenargument:

3D. Ist der Produktraum $[0, 1]^{\mathbb{R}}$ metrisierbar?

Ja Nein. Metrik oder Gegenargument:

Aufgabe 4. *Teilräume und Quotienten* (2+2+3+3=10 Punkte)

4A. Sei (X, \mathcal{T}_X) ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q : X \twoheadrightarrow Q = X/R$ die Quotientenabbildung. Definieren Sie die Quotiententopologie \mathcal{T}_Q auf Q :

$$\mathcal{T}_Q = \left\{ \quad \quad \quad \right\}$$

4B. Sei (Y, \mathcal{T}_Y) ein topologischer Raum, $B \subset Y$ eine Teilmenge und $\iota : B \hookrightarrow Y$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Definieren Sie die Teilraumtopologie \mathcal{T}_B auf B :

$$\mathcal{T}_B = \left\{ \quad \quad \quad \right\}$$

4C. Was besagt die kanonische Faktorisierung einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$?

4D. Ist für jeden erstabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum X/\sim erstabzählbar?

Ja Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

Aufgabe 5. *Einbettungen und Identifizierungen (3+3+3+3=12 Punkte)*

5A. Sei $s : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch $s(x, y) = (x, y, 0)$. Ist s eine Einbettung?

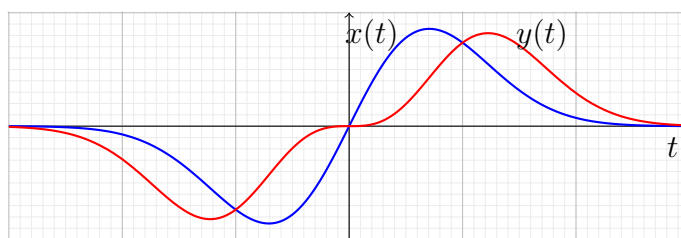
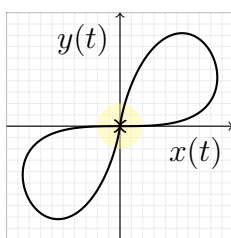
Ja Nein. Begründung:

5B. Sei $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p(x, y, z) = (x, y)$. Ist p eine Identifizierung?

Ja Nein. Begründung:

5C. Ist jede stetige Bijektion $f : X \rightarrow Y$ zwischen Teilräumen $X, Y \subset \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus?

Ja Nein. Begründung:



5D. Die Skizze zeigt die injektive Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ mit den Koordinatenfunktionen $x(t) = 2te^{-t^2}$ und $y(t) = 2t^3e^{-t^2}$. Ist f eine Einbettung?

Ja Nein. Begründung:

Aufgabe 6. *Homöomorphie, jetzt oder nie! (3+3+3+3=12 Punkte)*


Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei wie üblich $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die euklidische Norm, $\mathbb{D}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$ der abgeschlossene Einheitsball sowie $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$ der offene Einheitsball und $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ die Einheitssphäre. Sei e_1, \dots, e_n die Standardbasis des \mathbb{R}^n .

6A. Geben Sie zueinander inverse Homöomorphismen an zwischen $U := \mathbb{S}^n \setminus \{e_{n+1}\}$ und \mathbb{R}^n . (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

6B. Auf \mathbb{R} definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x - y \in \mathbb{Z}$. Geben Sie zum Quotienten \mathbb{R}/\sim einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an sowie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow X$ mit induzierter stetiger Bijektion $\bar{f} : \mathbb{R}/\sim \rightarrow X$. Warum ist \bar{f} ein Homöomorphismus?

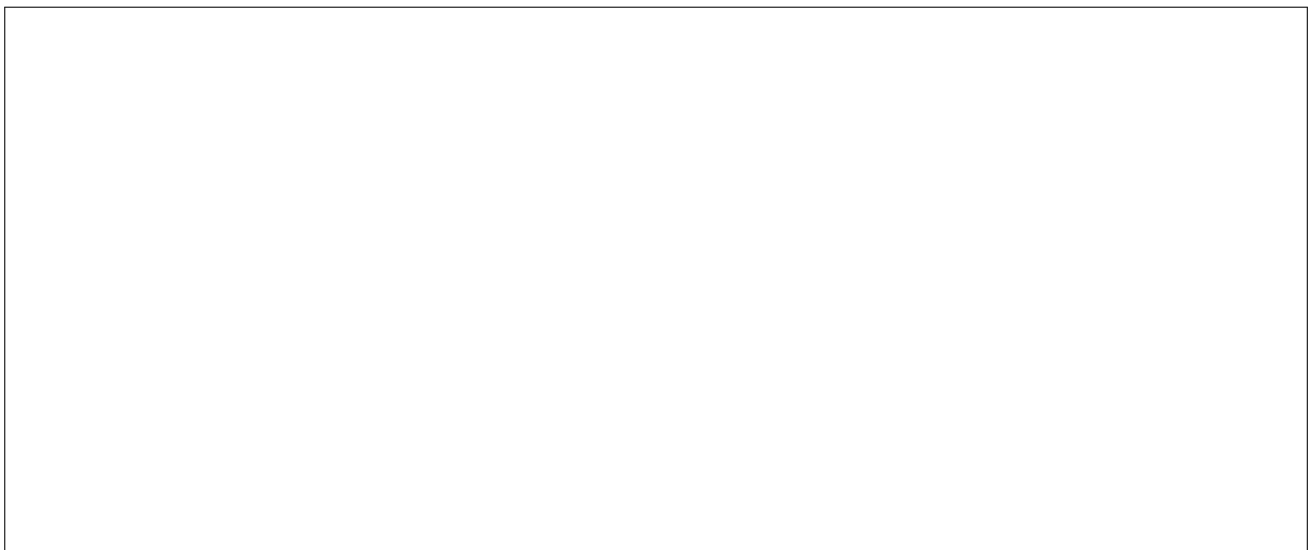
6C. Auf der Einheitskreisscheibe \mathbb{D}^2 definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $|x| = |y|$. Geben Sie zum Quotienten \mathbb{D}^2/\sim einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : X \rightarrow \mathbb{D}^2/\sim$ und $g : \mathbb{D}^2/\sim \rightarrow X$.

(Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)



6D. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $\mathbb{R}_{>0} \cdot x = \mathbb{R}_{>0} \cdot y$. Geben Sie zum Quotienten X/\sim einen homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^n$ an, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : Y \rightarrow X/\sim$ und $g : X/\sim \rightarrow Y$.

(Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)



Aufgabe 7. Ja, nein, warum? (3+3+3+3=12 Punkte)

7A. Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung, $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ eine Überdeckung durch abgeschlossene Mengen $A_i \subset X$, und jede Einschränkung $f|_{A_i} : A_i \rightarrow Y$ sei stetig. Ist dann f stetig?

Ja Nein. Begründung:

7B. Erlaubt der euklidische Raum \mathbb{R}^n für seine Topologie eine abzählbare Basis \mathcal{B} ?

Ja Nein. Begründung:

7C. Ist die euklidische Ebene \mathbb{R}^2 eine abzählbare Vereinigung von Geraden?

Ja Nein. Begründung:

7D. Sei $\mathbb{Q} = \{q_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ eine Abzählung. Die Menge $U_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]q_k - 2^{-k}/n, q_k + 2^{-k}/n[$ ist offen und dicht in \mathbb{R} und hat Gesamtlänge $\text{vol}_1(U_n) \leq \sum_{k=0}^{\infty} 2^{1-k}/n = 4/n$. Der Durchschnitt $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ hat demnach Gesamtlänge 0. Offensichtlich gilt $\mathbb{Q} \subset A$. Gilt $A = \mathbb{Q}$?

Ja Nein. Begründung: