Scheinklausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Wo dies verlangt wird, begründen Sie bitte ihre Antwort – kurz aber überzeugend – etwa durch Nennung eines passenden Ergebnisses oder Beispiels aus Vorlesung oder Übung.
- Bei Multiple-Choice-Fragen (Aufgabe 2) gibt es Punkte für jede richtige Antwort, keine Punkte bei fehlender Antwort, und negative Punkte für jede falsche Antwort (im Mittel jeweils 0). Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/18	/10	/10	/12	/12	/12	/75

Vorwort zur Musterlösung: Diese Klausur dient als Zwischenbilanz zur Wiederholung der grundlegenden Begriffe: Definitionen und Sätze, Beispiele und Gegenbeispiele aus Vorlesung und Übung. Die Fragen sind sehr zahlreich aber leicht: Sie wurden in Vorlesung und/oder Übung diskutiert, nur 5D, 6D, 7D fordern Anwendung der Techniken auf ein neues Beispiel. Gefragt ist, ein einfaches Beispiel einzuordnen und ein passendes Werkzeug zu nennen. Diesen unspektakulären aber nützlichen Fragentyp können Sie zur Diagnose nutzen, und auch ähnliche Fragen selbst entwickeln, um Begriffe und Techniken einzuüben. Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war.

Aufgabe 2. *Topologische Eigenschaften (18 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

2A. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$ in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$?	[X] Ja	[ ] Nein
2B. Konvergiert $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{2k}/(2k)!$ gleichmäßig auf ganz $\mathbb{R}$?	[ ] Ja	[X] Nein
2C. Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.	[ ] Ja	[X] Nein
2D. Für die abgeschlossene Hülle gilt immer $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.	[X] Ja	[ ] Nein
2E. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto f\vert_{\mathbb{Q}}$ ist injektiv.	[X] Ja	[ ] Nein
2F. Die Abbildung $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{C}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ mit $f \mapsto f\vert_{\mathbb{Q}}$ ist surjektiv.	[ ] Ja	[X] Nein
2G. Jede Topologie wird von mindestens einer Metrik induziert.	[ ] Ja	[X] Nein
2H. Jede Topologie wird von höchstens einer Metrik induziert.	[ ] Ja	[X] Nein
2I. Das erste Abzählbarkeitsaxiom impliziert das zweite.	[ ] Ja	[X] Nein
2J. Das zweite Abzählbarkeitsaxiom impliziert das erste.	[X] Ja	[ ] Nein
2K. Jeder normierte $\mathbb{R}$–Vektorraum ist zweitabzählbar.	[ ] Ja	[X] Nein
2L. Jeder separable metrisierbare Raum ist zweitabzählbar.	[X] Ja	[ ] Nein
2M. Jeder metrisierbare Raum ist erstabzählbar und hausdorffsch.	[X] Ja	[ ] Nein
2N. Jeder zweitabzählbare reguläre (T_1&T_3) Raum ist metrisierbar.	[X] Ja	[ ] Nein
2O. Jeder Teilraum eines Hausdorff–Raums ist hausdorffsch.	[X] Ja	[ ] Nein
2P. Jeder Quotientenraum eines Hausdorff–Raums ist hausdorffsch.	[ ] Ja	[X] Nein
2Q. Die Summentopologie auf $X \sqcup Y$ besteht genau aus den Vereinigungen $U \sqcup V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen.	[X] Ja	[ ] Nein
2R. Die Produkttopologie auf $X \times Y$ besteht genau aus den Produkten $U \times V$ mit $U \subset X$ offen und $V \subset Y$ offen.	[ ] Ja	[X] Nein

Aufgabe 3. *Produkte* (*2+2+3+3=10 Punkte*)

3A. Seien $(X_i, \mathcal{T}_i)$ topologische Räume, $X = \prod_{i \in I} X_i$ das Produkt und $p_i : X \to X_i$ die kanonischen Projektionen. Definieren Sie die Produkttopologie $\mathcal{T}$ auf X durch eine Basis $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B} = \left\{ \blacktriangleright\ p_{i_1}^{-1}(U_{i_1}) \cap \dots \cap p_{i_n}^{-1}(U_{i_n}) \ \middle|\ \blacktriangleright\ n \in \mathbb{N},\ i_k \in I,\ U_{i_k} \in \mathcal{T}_{i_k} \right\}$$

Erläuterung: Wir bilden nur endliche Schnitte! (Mehrere Schreibweisen sind möglich...)

3B. Welche universelle Abbildungseigenschaft charakterisiert die Produkttopologie?

► Eine Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T})$ ist genau dann stetig,
► wenn jede Komposition $p_i \circ f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ stetig ist.

Erläuterung: Gegeben sind die topologischen Räume $(X_i, \mathcal{T}_i)$ für $i \in I$. Der Produktraum $(X, \mathcal{T})$ erlaubt die stetigen Abbildungen $p_i : (X, \mathcal{T}) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ und wird durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Für jede Familie stetiger Abbildungen $f_i : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X_i, \mathcal{T}_i)$ mit $i \in I$ existiert genau eine stetige Abbildung $f : (Y, \mathcal{T}_Y) \to (X, \mathcal{T})$ mit $p_i \circ f = f_i$ für alle $i \in I$.

3C. Ist der Produktraum $[0,1]^{\mathbb{N}}$ metrisierbar?

[X] Ja [ ] Nein. Metrik oder Gegenargument:

►► Eine geeignete Metrik ist $d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} |x_k - y_k|$.

Erläuterung: Jedes abzählbare Produkt metrisierbarer Räume ist ebenso metrisierbar.
Der Hilbert–Würfel $[0,1]^{\mathbb{N}}$ ist Grundlage des Metrisierungssatzes von Urysohn.

3D. Ist der Produktraum $[0,1]^{\mathbb{R}}$ metrisierbar?

[ ] Ja [X] Nein. Metrik oder Gegenargument:

►► Er erfüllt nicht das erste Abzählbarkeitsaxiom (siehe 2C), da $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Erläuterung: Das konkrete Beispiel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ wurde in der Vorlesung ausgeführt.
Allgemein gilt: Überabzählbare Produkte $\prod_{i \in I} X_i$ sind nicht metrisierbar,
wobei wir $|X_i| \geq 2$ für alle $i \in I$ voraussetzen, um triviale Sonderfälle auszuschließen.

Aufgabe 4. *Teilräume und Quotienten (2+2+3+3=10 Punkte)*

4A. Sei $(X, \mathcal{T}_X)$ ein topologischer Raum, $R \subset X \times X$ eine Äquivalenzrelation auf X und $q : X \twoheadrightarrow Q = X/R$ die Quotientenabbildung. Definieren Sie die Quotiententopologie $\mathcal{T}_Q$ auf Q:

$$\mathcal{T}_Q = \left\{ \blacktriangleright\ V \subset Q \;\middle|\; \blacktriangleright\ q^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X \right\}$$

4B. Sei $(Y, \mathcal{T}_Y)$ ein topologischer Raum, $B \subset Y$ eine Teilmenge und $\iota : B \hookrightarrow Y$ die zugehörige Inklusionsabbildung. Definieren Sie die Teilraumtopologie $\mathcal{T}_B$ auf B:

$$\mathcal{T}_B = \left\{ \blacktriangleright\ V \cap B = \iota^{-1}(V) \;\middle|\; \blacktriangleright\ V \in \mathcal{T}_Y \right\}$$

4C. Was besagt die kanonische Faktorisierung einer stetigen Abbildung $f : X \to Y$?

▶ Es gilt $f = \iota \circ \bar{f} \circ q$ mit der ▶ stetigen ▶ Bijektion $\bar{f} : X/R_f \to f(X)$, $\bar{f}([x]) = f(x)$,

Erläuterung: Hier nutzen wir wesentlich die Quotientenabbildung $q : X \twoheadrightarrow X/R_f$, $x \mapsto [x]$, und die Quotiententopologie auf $Q = X/R_f$ sowie die Einbettung $\iota : f(X) \hookrightarrow Y$, $y \mapsto y$, und die Teilraumtopologie auf der Bildmenge $B = f(X)$ im Raum Y, wie oben erklärt.

Alternativ ist auch die Darstellung als kommutatives Diagramm möglich, und vermutlich suggestiver. Entscheidend ist in beiden Darstellungen die Aussage, dass die induzierte Abbildung $\bar{f}$ bijektiv und stetig ist; letzteres verdanken wir den obigen Topologien.

4D. Ist für jeden erstabzählbaren Raum X auch jeder Quotientenraum $X/_\sim$ erstabzählbar?

☐ Ja ☒ Nein. Beweis oder Gegenbeispiel:

▶▶ Als Gegenbeispiel kennen wir $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ aus der Übung.

Erläuterung: Auch $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Q}$ ist ein Gegenbeispiel. Das ist analog zu $\mathbb{R} /\!\!/ \mathbb{Z}$ aber etwas komplizierter (und wurde in Vorlesung und Übung nicht behandelt). Weitere Gegenbeispiele sind möglich. . .

Aufgabe 5. *Einbettungen und Identifizierungen (3+3+3+3=12 Punkte)*

5A. Sei $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch $s(x, y) = (x, y, 0)$. Ist s eine Einbettung?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

▶▶ Die Abbildung s ist abgeschlossen. Insbesondere ist sie somit einbettend.
Alternativ: Es gilt $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit der Retraktion p aus 5B. Hieraus folgt $s^*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$.

5B. Sei $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $p(x, y, z) = (x, y)$. Ist p eine Identifizierung?

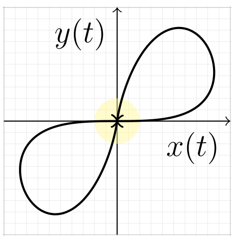
[X] Ja [ ] Nein. Begründung:

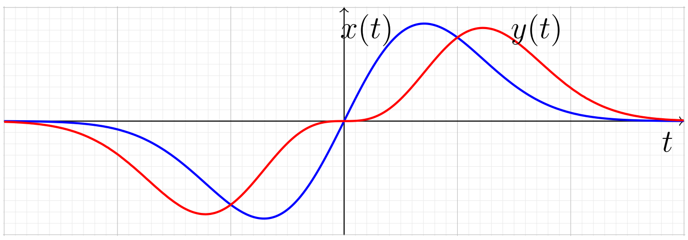
▶▶ Die Abbildung p ist offen. Insbesondere ist sie somit identifizierend.
Alternativ: Es gilt $p \circ s = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit dem Schnitt s aus 5A. Hieraus folgt $p_*\mathcal{T}_{\mathbb{R}^3} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}^2}$.

5C. Ist jede stetige Bijektion $f : X \to Y$ zwischen Teilräumen $X, Y \subset \mathbb{R}$ ein Homöomorphismus?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung: ▶▶ Als Gegenbeispiel kennen wir die stetige Bijektion $f : X \to Y$ mit $X = [0, 1[\cup [2, 3[$ und $Y = [0, 2[$ mit $f(x) = x$ für $0 \le x < 1$ und $f(x) = x - 1$ für $2 \le x < 3$.

Erläuterung: Offensichtlich ist f kein Homöomorphismus. Explizit zeigt man dies damit, dass f nicht offen ist: Zum Beispiel ist $[2, 3[$ offen in X aber $f([2, 3[) = [1, 2[$ ist nicht offen in Y.
Alternativ: Jede Bijektion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ist stetig aber kein Homöomorphismus.





5D. Die Skizze zeigt die injektive Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ mit den Koordinatenfunktionen $x(t) = 2t\mathrm{e}^{-t^2}$ und $y(t) = 2t^3\mathrm{e}^{-t^2}$. Ist f eine Einbettung?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung: ▶▶ In $\mathbb{R}$ ist $]-1, 1[$ offen, aber $f(]-1, 1[)$ ist nicht offen in $f(\mathbb{R})$.

Erläuterung: Man betrachte die Skizze: Jede Umgebung von $(0, 0)$ im Bildraum $f(\mathbb{R})$ enthält nicht nur den waagrechten Teil sondern auch noch die beiden senkrechten Enden! Somit ist $\hat{f} : \mathbb{R} \to f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2$ eine stetige Bijektion, aber kein Homöomorphismus.

Aufgabe 6. *Homöomorphie, jetzt oder nie!* (*3+3+3+3=12 Punkte*)

Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei wie üblich $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$ die euklidische Norm, $\mathbb{D}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \le 1 \}$ der abgeschlossene Einheitsball sowie $\mathbb{B}^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1 \}$ der offene Einheitsball und $\mathbb{S}^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1 \}$ die Einheitssphäre. Sei $e_1, \dots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$.

6A. Geben Sie zueinander inverse Homöomorphismen an zwischen $U := \mathbb{S}^n \smallsetminus \{e_{n+1}\}$ und $\mathbb{R}^n$. (Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

▶ $f : \mathbb{R}^{n+1} \supset U \to \mathbb{R}^n, \qquad f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \dfrac{1}{1 - x_{n+1}} \big(x_1, \dots, x_n \big),$

▶▶ $g : \mathbb{R}^n \to U \subset \mathbb{R}^{n+1}, \qquad g(y_1, \dots, y_n) = \dfrac{1}{|y|^2 + 1} \big(2y_1, \dots, 2y_n, |y|^2 - 1 \big).$

Erläuterung: Wir kennen diese stereographische Projektion f aus der Vorlesung: Die erste Formel ergibt sich leicht aus einer Skizze, die Umkehrung muss man ausrechnen. Alternativ kann man auch die Inversionsabbildung $\mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{e_{n+1}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^{n+1} \smallsetminus \{e_{n+1}\}$ aus der Übung nehmen, diese muss dann allerdings der Fragestellung angepasst werden. Stehen die Formeln erst einmal da, ist der Rest leicht: Wohldefiniertheit und Stetigkeit von f sind klar, die von g rechnet man leicht nach, ebenso $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$. (Dies war hier nicht verlangt.)

6B. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch $x - y \in \mathbb{Z}$. Geben Sie zum Quotienten $\mathbb{R}/_\sim$ einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an sowie eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R} \to X$ mit induzierter stetiger Bijektion $\bar{f} : \mathbb{R}/_\sim \to X$. Warum ist $\bar{f}$ ein Homöomorphismus?

▶ Der Quotient $\mathbb{R}/_\sim$ ist homöomorph zur Kreislinie $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$ vermöge:

▶ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1, \qquad f(t) = \exp(2\pi i t)$

$\bar{f} : \mathbb{R}/_\sim \to \mathbb{S}^1, \qquad \bar{f}(t + \mathbb{Z}) = \exp(2\pi i t)$

Dank kanonischer Faktorisierung ist $\bar{f}$ eine stetige Bijektion. ▶ Zudem gilt:
(1) Wir können explizit eine stetige Umkehrfunktion $\mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}/_\sim$ konstruieren.
(2) f ist ein lokaler Homöomorphismus, also insbesondere offen und somit identifizierend.
(3) $\mathbb{R}/_\sim$ ist kompakt, $\mathbb{S}^1$ hausdorffsch, also $\bar{f}$ abgeschlossen und somit ein Homöomorphismus.

Erläuterung: Dieses wichtige Beispiel wurde in der Vorlesung ausführlich diskutiert und mit den drei unabhängigen Methoden nachgewiesen, dass $\bar{f}$ tatsächlich ein Homöomorphismus ist.

6C. Auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $|x| = |y|$. Geben Sie zum Quotienten $\mathbb{D}^2/_\sim$ einen homöomorphen Raum $X \subset \mathbb{R}^n$ an, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : X \to \mathbb{D}^2/_\sim$ und $g : \mathbb{D}^2/_\sim \to X$.
(Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

▶ Der Quotient $\mathbb{D}^2/_\sim$ ist homöomorph zum Intervall $[0,1] \subset \mathbb{R}$ vermöge:

- ▶ $f : [0,1] \to \mathbb{D}^2/_\sim, \qquad f(r) = [(r,0)] = r \cdot \mathbb{S}^1$
- ▶ $g : \mathbb{D}^2/_\sim \to [0,1], \qquad g([x]) = |x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

Erläuterung: Wie kommt man auf solche Formeln? Man mache sich eine Skizze! Das äquivalente Beispiel $\mathbb{R}^2/_\sim$ wurde in der Übung diskutiert. Stehen die Formeln erst einmal da, ist der Rest leicht: Wohldefiniertheit, Stetigkeit, $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$ rechnet man geduldig nach, das war hier aber nicht verlangt. (Die Antwort $\mathbb{D}^2/_\sim \cong \mathbb{D}^1$ ist ebenfalls möglich und durch die Scheinklausur des Vorjahres inspiriert. Die Abbildungen waren letztes Jahr nicht gefragt und sind für die vorliegende Frage anzupassen; die Formeln sind dann weniger natürlich.)

6D. Auf dem Raum $X = \mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\}$ definieren wir die Äquivalenzrelation $x \sim y$ durch die Bedingung $\mathbb{R}_{>0} \cdot x = \mathbb{R}_{>0} \cdot y$. Geben Sie zum Quotienten $X/_\sim$ einen homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^n$ an, sowie zueinander inverse Homöomorphismen $f : Y \to X/_\sim$ und $g : X/_\sim \to Y$.
(Gefragt sind die expliziten Abbildungen, nicht jedoch der Nachweis ihrer Eigenschaften.)

▶ Der Quotient $(\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}$ ist homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$ vermöge:

- ▶ $f : \mathbb{S}^2 \to (\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0}, \qquad f(s) = [s] = \mathbb{R}_{>0} \cdot s$
- ▶ $g : (\mathbb{R}^3 \smallsetminus \{0\})/\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{S}^2, \qquad g([x]) = x/|x|$

Erläuterung: Wie kommt man auf solche Formeln? Man mache sich eine Skizze! Stehen die Formeln erst einmal da, ist der Rest leicht: Wohldefiniertheit, Stetigkeit, $g \circ f = \mathrm{id}$ und $f \circ g = \mathrm{id}$ rechnet man geduldig nach, das war hier aber nicht verlangt.

Aufgabe 7. *Ja, nein, warum? (3+3+3+3=12 Punkte)*

7A. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung, $X = A_1 \cup \dots \cup A_n$ eine Überdeckung durch abgeschlossene Mengen $A_i \subset X$, und jede Einschränkung $f|_{A_i} : A_i \to Y$ sei stetig. Ist dann f stetig?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:
▶▶ Das ist ein Spezialfall des Verklebesatzes für stetige Abbildungen. (Beweis: Ist $B \subset Y$ abgeschlossen, so auch $f|_{A_i}^{-1}(B)$ in A_i, somit auch $f^{-1}(B) = f|_{A_1}^{-1}(B) \cup \dots \cup f|_{A_n}^{-1}(B)$ in X.)

Erläuterung: Der Verklebesatz gilt für beliebige offene Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ oder lokal-endliche abgeschlossene Überdeckungen $X = \bigcup_{i \in I} A_i$. Letzteres gilt hier für $I = \{1, \dots, n\}$.

7B. Erlaubt der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$ für seine Topologie eine abzählbare Basis $\mathcal{B}$?

[X] Ja [ ] Nein. Begründung:
▶▶ Konkret: $\mathcal{B} = \left\{ \prod_{i=1}^n]a_i, b_i[\;\middle|\; a_i, b_i \in \mathbb{Q} \right\}$
Alternativ: $\mathcal{B} = \left\{ B(a, r) \;\middle|\; a \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}_{>0} \right\}$
Abstrakt: $\mathbb{R}^n$ ist metrisierbar und separabel, nach 2L also zweitabzählbar.

7C. Ist die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$ eine abzählbare Vereinigung von Geraden?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung: ▶ Dies folgt aus dem Satz von Baire:
▶ Jede Gerade $A_k \subset \mathbb{R}^2$ ist nirgends dicht, also mager in $\mathbb{R}^2$.

Erläuterung: Die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ magerer Mengen ist mager in $\mathbb{R}^2$.
Hingegen ist $\mathbb{R}^2$ komager und nicht mager im Raum $\mathbb{R}^2$ nach dem Satz von Baire.
(Alternativ kann man genauso mit dem Lebesgue–Maß argumentieren. Oder geometrisch...)

7D. Sei $\mathbb{Q} = \{ q_k \mid k \in \mathbb{N} \}$ eine Abzählung. Die Menge $U_n = \bigcup_{k \in \mathbb{N}}]q_k - 2^{-k}/n, q_k + 2^{-k}/n[$ ist offen und dicht in $\mathbb{R}$ und hat Gesamtlänge $\operatorname{vol}_1(U_n) \le \sum_{k=0}^{\infty} 2^{1-k}/n = 4/n$. Der Durchschnitt $A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ hat demnach Gesamtlänge 0. Offensichtlich gilt $\mathbb{Q} \subset A$. Gilt $A = \mathbb{Q}$?

[ ] Ja [X] Nein. Begründung: ▶ Dies folgt aus dem Satz von Baire:
▶ Jede der Mengen U_k ist offen und dicht, also komager in $\mathbb{R}$.

Erläuterung: Der abzählbare Durchschnitt A komagerer Mengen ist komager in $\mathbb{R}$.
Hingegen ist $\mathbb{Q}$ mager und nicht komager im Raum $\mathbb{R}^2$ nach dem Satz von Baire.
(Im Gegensatz zur vorigen Aufgabe hilft das Lebesgue–Maß hier nicht!)