Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Bei Multiple-Choice-Fragen (Aufgabe 2) gibt es Punkte für jede richtige Antwort, keine Punkte bei fehlender Antwort, und negative Punkte für jede falsche Antwort (im Mittel jeweils 0). Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.
- *Tipp:* Es gibt genug einfache Fragen, verbeißen Sie sich nicht zuerst in schwierige.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/14	/12	/9	/11	/9	/11	/14	/81

Aufgabe 2. *Topologisches Allerlei (14 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

2A. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. ☐ Ja ☐ Nein

2B. In jedem Hausdorff–Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. ☐ Ja ☐ Nein

2C. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \to \mathbb{S}^n$ mit $0 \le k < n$ ist zusammenziehbar. ☐ Ja ☐ Nein

2D. In mindestens einer Dimension $n \ge 0$ ist $\mathrm{id} : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar. ☐ Ja ☐ Nein

2E. Jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene in zwei Komponenten. ☐ Ja ☐ Nein

2F. Jede Einbettung $f : \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene in ≤ 2 Komponenten. ☐ Ja ☐ Nein

2G. Jede stetige injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung. ☐ Ja ☐ Nein

2H. Jede stetige injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist offen. ☐ Ja ☐ Nein

2I. Für $n \ge 2$ hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^n, *)$ genau zwei Elemente. ☐ Ja ☐ Nein

2J. Für $n = 1$ hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{RP}^1, *)$ genau zwei Elemente. ☐ Ja ☐ Nein

2K. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ hat einen Fixpunkt. ☐ Ja ☐ Nein

2L. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \to \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt. ☐ Ja ☐ Nein

2M. Aus Metrisierbarkeit folgt T_2 und 1AA (1. Abzählbarkeitsaxiom). ☐ Ja ☐ Nein

2N. Metrisierbarkeit folgt aus T_1&T_3 und 2AA (2. Abzählbarkeitsaxiom). ☐ Ja ☐ Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit und Zusammenhang* (*3+3+3+3 = 12 Punkte*)

3A. Sei $f : X \to Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt?

Beweis oder Gegenbeispiel:

3B. Sei $f : X \to Y$ stetig, X kompakt, Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?

Beweis oder Gegenbeispiel:

3C. Es gibt stetige Surjektionen $[0,1] \twoheadrightarrow [0,1]^2$. Gibt es stetige Bijektionen $f : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]^2$?

Beispiel oder Gegenbeweis:

3D. Ist die Menge $\mathrm{GL}_n \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ offen? und dicht? und wegzusammenhängend?

Begründete Antworten:

Aufgabe 4. *Flächen, Homöomorphismen und Invarianten* (*2+2+2+3 = 9 Punkte*)

4A. Sind die (nicht-kompakten) Flächen $X = [0,1] \times]0,1[$ und $Y = [0,1[\times]0,1[$ homöomorph?

Begründete Antwort:

4B. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gibt, indem Sie hierzu eine topologische Invariante benennen mit ihren beiden verschiedenen Werten für $\mathbb{S}^2$ und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Invariante Ihrer Wahl:

4C. Geben Sie hierzu ebenso eine weitere solche Invariante an, die von 4B unabhängig ist.

Alternative Invariante:

4D. Ist jede stetige Injektion $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ offen? abgeschlossen? ein Homöomorphismus?

Begründete Antworten:

Aufgabe 5. *Homotopie (3+3+3+2 = 11 Punkte)*

5A. Existiert zur Einbettung $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{e_3\}$ mit $\iota(x, y) = (x, y, 0)$ eine Retraktion?

Retraktion oder Gegenbeweis:

5B. Existiert zu $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \smallsetminus \{\pm e_3\}$ mit $\iota(x, y) = (x, y, 0)$ eine starke Homotopie-Retraktion?

Retraktion mit Homotopie oder Gegenbeweis:

5C. Nennen Sie eine nicht-zusammenziehbare stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ mit Beweis.
Hinweis: Nutzen Sie neben f auch die kanonische Projektion $g : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^2$ mit $g(x, y) = x$.

Abbildung und Beweis:

5D. Sind die Räume $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ und $\mathbb{S}^5$ homotopie-äquivalent?

Begründete Antwort:

Aufgabe 6. *Abbildung von* SO_3 *auf* $\mathbb{RP}^3$ (*3+2+3+1 = 9 Punkte*)

6A. Im Produktraum $X = \mathbb{S}^n \times [0, 2\pi]$ schlagen wir $\mathbb{S}^n \times \{0\}$ zusammen und separat $\mathbb{S}^n \times \{2\pi\}$. Dies definiert die Äquivalenzrelation $(s,t) \sim (s',t')$ durch $(s,t) = (s',t')$ oder $t = t' \in \{0, 2\pi\}$. Nennen Sie einen zu $X/_\sim$ homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^m$ und zum Beleg eine stetige Abbildung $p : X \to \mathbb{R}^m$, die eine Bijektion $\bar{p} : X/_\sim \to Y$ induziert. (Ein Beweis hierfür wird nicht verlangt.)

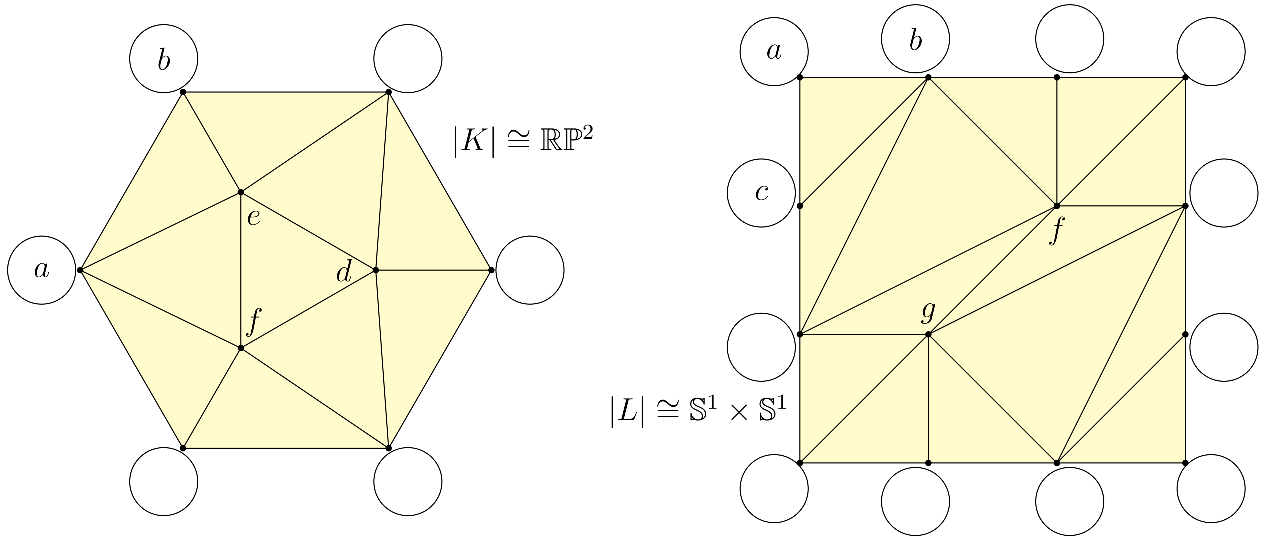
6B. Warum ist die stetige Bijektion $\bar{p} : X/_\sim \to Y$ aus 6A ein Homöomorphismus?

6C. Die Drehung $\rho(s,t) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um die Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit dem Winkel $t \in [0, 2\pi]$ ist $x \mapsto x + \sin(t) \cdot s \times x + (1 - \cos(t)) \cdot s \times (s \times x)$. Wir erhalten so eine stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0, 2\pi] \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$. Konstruieren Sie hieraus eine stetige Surjektion $h : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ und einen Homöomorphismus $\bar{h} : \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$.

6D. Geben sie einen geschlossenen Weg $\gamma : [0,1] \to \mathrm{SO}_3$ an, der nicht zusammenziehbar ist.

Aufgabe 7. *Simpliziale Flächen* ($4+2+2+1+2 = 11$ *Punkte*)

7A. Die folgende Graphik zeigt Simplizialkomplexe K und L: Beschriften Sie K so mit Ecken a, b, c, d, e, f, dass eine Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{RP}^2$ entsteht. Beschriften Sie L so mit Ecken a, b, c, d, e, f, g, dass eine Triangulierung der Torusfläche $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ entsteht. (Gleich bezeichnete Ecken werden identifiziert, Kanten und Dreiecke sind die in der Ebene gezeigten.)



7B. Aus K entfernen wir das zentrale Dreieck $\{d, e, f\}$ und betrachten $M := K \smallsetminus \{\{d, e, f\}\}$. Berechnen Sie $\chi(M)$. Welche Fläche ist dies? (Es genügt der Name oder das Modell $F^{\pm}_{g,r}$.)

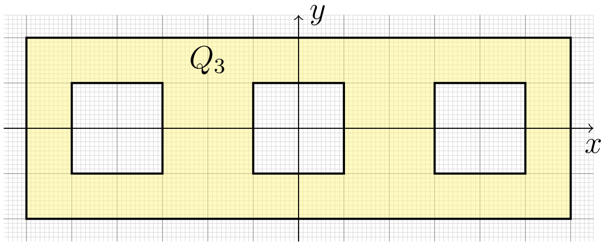
7C. Die simpliziale Fläche $N := (M_1 \sqcup M_2)/_\sim$ entsteht durch zwei Kopien von M, wobei wir $d_1 = d_2$, $e_1 = e_2$, $f_1 = f_2$ verkleben. Berechnen Sie $\chi(N)$. Welche Fläche erhalten wir?

7D. Geben Sie in (K, a) einen nicht-zusammenziehbaren, geschlossenen Kantenzug an.

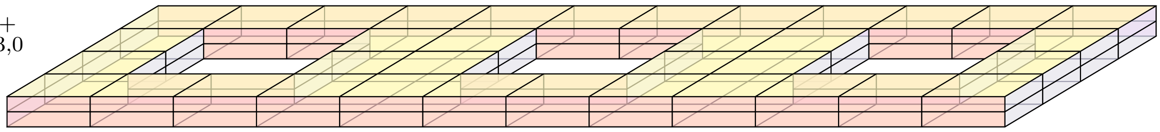
7E. Geben Sie in (L, a) zwei geschlossene Kantenzüge an, die die Gruppe $\pi_1(L, a)$ erzeugen.

Aufgabe 8. *Quotienten von Flächen (2+2+2+2+2+2+2 = 14 Punkte)*

Wie in der Vorlesung sei $F^{\pm}_{g,r}$ die zusammenhängende Modellfläche vom Geschlecht $g \ge 0$ mit $r \ge 0$ Randkomponenten und Orientierbarkeit $\pm$. Die Skizze zeigt $F^{+}_{3,0} = \partial H_3$ im $\mathbb{R}^3$ als Rand des Henkelkörpers $H_3 = Q_3 \times [-1,1]$ über folgendem Grundriss:



$F^{+}_{3,0}$



Jeder der folgenden Quotienten von $F^{+}_{3,0}$ ist homöomorph zu einer Fläche $F^{\pm}_{g,r}$: zu welcher?

8A. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$ ist homöomorph zu:

8B. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (x,y,-z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfläche $Z = \{\, (x,y,z) \in F^{+}_{3,0} \mid z \ge 0 \,\}$.

8C. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (x,-y,z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfläche $Y = \{\, (x,y,z) \in F^{+}_{3,0} \mid y \ge 0 \,\}$.

8D. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (-x,y,z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfläche $X = \{\, (x,y,z) \in F^{+}_{3,0} \mid x \ge 0 \,\}$.

8E. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (x,-y,-z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Teilfläche X, Y, Z.

8F. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (-x,y,-z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Teilfläche X, Y, Z.

8G. Der Quotient von $F^{+}_{3,0}$ modulo $(x,y,z) \sim (-x,-y,z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Teilfläche X, Y, Z.