

Klausur zur Topologie

Aufgabe 1. Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung

Es gelten die üblichen Klausurbedingungen. Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** keine
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.
- Bei Multiple-Choice-Fragen (Aufgabe 2) gibt es Punkte für jede richtige Antwort, keine Punkte bei fehlender Antwort, und negative Punkte für jede falsche Antwort (im Mittel jeweils 0). Eine negative Gesamtpunktzahl der Aufgabe wird als Null gewertet.
- *Tipp:* Es gibt genug einfache Fragen, verbeißen Sie sich nicht zuerst in schwierige.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Gesamt
Punkte	/1	/14	/12	/9	/11	/9	/11	/14	/81

Vorwort zur Musterlösung: Zur Nacharbeitung habe ich Antworten ausführlicher formuliert und erläutert, als in der Prüfungssituation verlangt war. Nach der Klausur ist vor der Klausur. Die Klausur ist für 120 Minuten um etwa eine Aufgabe zu lang. Die Notenskala wird so angepasst, dass man eine beliebige Aufgabe weglassen und dennoch die Note 1,0 erreichen kann.

Aufgabe 2. *Topologisches Allerlei (14 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen (bzw. Aussagen) mit ja (= wahr) oder nein (= unwahr). Jede richtige Antwort gibt einen Punkt, für jede falsche wird ein Punkt abgezogen (Mittelwert 0).

2A. In jedem Kompaktum ist jede abgeschlossene Teilmenge kompakt. Ja Nein

2B. In jedem Hausdorff-Raum ist jedes Kompaktum abgeschlossen. Ja Nein

2C. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^k \rightarrow \mathbb{S}^n$ mit $0 \leq k < n$ ist zusammenziehbar. Ja Nein

2D. In mindestens einer Dimension $n \geq 0$ ist $\text{id} : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ zusammenziehbar. Ja Nein

2E. Jede Einbettung $f : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene in zwei Komponenten. Ja Nein

2F. Jede Einbettung $f : \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ zerlegt die Ebene in ≤ 2 Komponenten. Ja Nein

2G. Jede stetige injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Einbettung. Ja Nein

2H. Jede stetige injektive Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist offen. Ja Nein

2I. Für $n \geq 2$ hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^n, *)$ genau zwei Elemente. Ja Nein

2J. Für $n = 1$ hat die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{R}\mathbb{P}^1, *)$ genau zwei Elemente. Ja Nein

2K. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{S}^n$ hat einen Fixpunkt. Ja Nein

2L. Jede stetige Abbildung $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat einen Fixpunkt. Ja Nein

2M. Aus Metrisierbarkeit folgt T_2 und 1AA (1. Abzählbarkeitsaxiom). Ja Nein

2N. Metrisierbarkeit folgt aus $T_1 \& T_3$ und 2AA (2. Abzählbarkeitsaxiom). Ja Nein

Aufgabe 3. *Kompaktheit und Zusammenhang* (3+3+3+3 = 12 Punkte)**3A.** Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig und $A \subset X$ kompakt. Ist dann auch $f(A) \subset Y$ kompakt?*Beweis oder Gegenbeispiel:*Ja, $f(A)$ ist kompakt. Beweis: Sei $f(A) \subset \bigcup_{i \in I} V_i$ eine offene Überdeckung in Y .▶ Da f stetig ist, ist $U_i = f^{-1}(V_i)$ offen für jedes $i \in I$.Wir erhalten so die offene Überdeckung $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ in X .▶ Da A kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $A \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.▶ Aus $f(U_i) \subset V_i$ folgt $f(A) \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n}) \subset V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$.**3B.** Sei $f : X \rightarrow Y$ stetig, X kompakt, Y hausdorffsch. Ist dann f abgeschlossen?*Beweis oder Gegenbeispiel:*Ja, f ist abgeschlossen. Beweis: Sei $A \subset X$ abgeschlossen.▶ Da X kompakt ist, ist A kompakt (2A).▶ Da f stetig ist, ist das Bild $f(A)$ kompakt (3A).▶ Da Y hausdorffsch ist, ist $f(A)$ abgeschlossen (2B).**3C.** Es gibt stetige Surjektionen $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$. Gibt es stetige Bijektionen $f : [0, 1] \xrightarrow{\sim} [0, 1]^2$?*Beispiel oder Gegenbeweis:*

Nein, das ist unmöglich. Beweis:

▶ Wäre f stetig, so nach 3B auch abgeschlossen, also ein Homöomorphismus.▶ Die beiden Räume $[0, 1]$ und $[0, 1]^2$ sind aber nicht homöomorph:▶ In $[0, 1]$ gibt es trennende Punkte, in $[0, 1]^2$ nicht.*Erläuterung:* Peano-Kurven und ihre Verwandten sind stetige Surjektionen $[0, 1] \rightarrow [0, 1]^2$.

Dies nenne ich hier zum Kontrast, um die vorausgesetzte Bijektivität zu betonen.

3D. Ist die Menge $GL_n \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^{n \times n}$ offen? und dicht? und wegzusammenhängend?*Begründete Antworten:*▶ Das Urbild $GL_n \mathbb{R} = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ ist offen, denn $\det : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig.Die Determinante $\det(a_{ij})$ ist ein homogenes Polynom von Grad n in den Koeffizienten a_{ij} .▶ $GL_n \mathbb{R}$ ist dicht, denn für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und beliebig kleine $|t|$ ist $A - tE$ invertierbar. $P(t) = \det(A - tE)$ ist ein Polynom vom Grad n und verschwindet an höchstens n Stellen.▶ $\det : GL_n \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist stetig und surjektiv, also ist $GL_n \mathbb{R}$ nicht zusammenhängend.Die Mengen $GL_n^\pm \mathbb{R} = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \gtrless 0\}$ bilden eine nicht-triviale offene Zerlegung.

Aufgabe 4. *Flächen, Homöomorphismen und Invarianten* (2+2+2+3 = 9 Punkte)

4A. Sind die (nicht-kompakten) Flächen $X = [0, 1] \times]0, 1[$ und $Y = [0, 1[\times]0, 1[$ homöomorph?

Begründete Antwort:

Nein, sind sie nicht, wie man an ihren geometrischen Rändern erkennt:

- ▶ $\partial X = \{0, 1\} \times]0, 1[$ hat zwei Komponenten aber $\partial Y = \{0\} \times]0, 1[$ nur eine.
- ▶ Dank der topologischen Invarianz des geometrischen Randes folgt hieraus $X \not\cong Y$.

Erläuterung: Der Rand einer Mannigfaltigkeit ist eine topologische Invariante, bleibt also unter Homöomorphismen erhalten. Das ist nach der Definition von Mannigfaltigkeiten mit Rand zunächst nicht selbstverständlich, die Invarianz beweist man mit dem Abbildungsgrad.

Vorsicht vor Trugschlüssen: Die Flächen $[0, 1] \times [0, 1[$ und $[0, 1[\times [0, 1[$ sind homöomorph.

4B. Zeigen Sie, dass es keinen Homöomorphismus $f : \mathbb{S}^2 \xrightarrow{\sim} \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ gibt, indem Sie hierzu eine topologische Invariante benennen mit ihren beiden verschiedenen Werten für \mathbb{S}^2 und $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

Invariante Ihrer Wahl:

Für die Euler-Charakteristik gilt ▶ $\chi(\mathbb{S}^2) = 2$ aber ▶ $\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 0$.

Erläuterung: Die Werte $\chi(F_g^+) = 2 - 2g$ kennen wir insbesondere aus der Flächenklassifikation. Wir nutzen hier die Homöomorphie-Invarianz (wie in dieser Vorlesung ohne Beweis).

4C. Geben Sie hierzu ebenso eine weitere solche Invariante an, die von 4B unabhängig ist.

Alternative Invariante:

Für die Fundamentalgruppe gilt ▶ $\pi_1(\mathbb{S}^2, *) = \{[*]\}$ aber ▶ $(\pi_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1, *), \cdot) \cong (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, +)$.

Erläuterung: Die Berechnung kennen wir aus der Vorlesung, z.B. zur Flächenklassifikation. Die Homöomorphie-Invarianz der Fundamentalgruppe folgt aus ihrer Funktorialität.

4D. Ist jede stetige Injektion $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ offen? abgeschlossen? ein Homöomorphismus?

Begründete Antworten:

- ▶ Dank Invarianz des Gebietes (2H) ist f offen.
- ▶ Dank 3B ist f zudem abgeschlossen.

Somit ist insbesondere das Bild $f(\mathbb{S}^2)$ in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ offen und abgeschlossen.

- ▶ Da $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ zusammenhängend ist, ist f surjektiv, also ein Homöomorphismus.

Erläuterung: Nach 4B/C sind Homöomorphismen unmöglich, nach 4D auch stetige Injektionen.

Aufgabe 5. *Homotopie* ($3+3+3+2 = 11$ Punkte)**5A.** Existiert zur Einbettung $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$ mit $\iota(x, y) = (x, y, 0)$ eine Retraktion?*Retraktion oder Gegenbeweis:*

Nein, eine solche Retraktion kann es nicht geben. Beweis:

- ▶ Der Raum $X = \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\} \cong \mathbb{R}^2$ ist zusammenziehbar, also auch $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow X$.
- ▶ Gäbe es $r : X \rightarrow \mathbb{S}^1$ stetig mit $r \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$, so wäre auch $\text{id}_{\mathbb{S}^1}$ zusammenziehbar.
- ▶ Aber $\text{id}_{\mathbb{S}^1}$ ist nicht zusammenziehbar (2D), also kann es keine solche Retraktion r geben.

Erläuterung: Alternativ kann man π_1 auf $\text{id}_{\mathbb{S}^1} = r \circ \iota : (\mathbb{S}^1, e_1) \rightarrow (X, e_1) \rightarrow (\mathbb{S}^1, e_1)$ anwenden und erhält wegen $\pi_1(\mathbb{S}^1, e_1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_1(X, e_1) = \{1\}$ denselben Widerspruch.

5B. Existiert zu $\iota : \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\}$ mit $\iota(x, y) = (x, y, 0)$ eine starke Homotopie-Retraktion?*Retraktion mit Homotopie oder Gegenbeweis:*

- ▶ Retraktion $r : \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\} =: X \rightarrow \mathbb{S}^1$ mit $r(x, y, z) = \frac{(x, y)}{|(x, y)|}$.
- ▶▶ Homotopie $H : [0, 1] \times X \rightarrow X$ mit $H_t(x, y, z) = \frac{(x, y, tz)}{|(x, y, tz)|}$.

Erläuterung: Die Abbildung r ist wohldefiniert und stetig und erfüllt $r \circ \iota = \text{id}_{\mathbb{S}^1}$.

Die Abbildung H ist wohldefiniert und stetig, also eine Homotopie.

Sie verläuft von $H_0 = \iota \circ r$ nach $H_1 = \text{id}_X$, kurz $H : \iota \circ r \simeq \text{id}_X$.

Für alle $t \in [0, 1]$ gilt $H_t \circ \iota = \iota$, wir haben also eine Homotopie relativ \mathbb{S}^1 .

5C. Nennen Sie eine nicht-zusammenziehbare stetige Abbildung $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ mit Beweis.*Hinweis:* Nutzen Sie neben f auch die kanonische Projektion $g : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ mit $g(x, y) = x$.*Abbildung und Beweis:*

- ▶ Wir wählen $y \in \mathbb{S}^3$ und betrachten die Einbettung $f(x) = (x, y)$.
- ▶ Die Komposition $g \circ f = \text{id}_{\mathbb{S}^2}$ ist nicht zusammenziehbar (2D).
- ▶ Demnach ist auch f nicht zusammenziehbar, also $[f] \neq [*]$ in $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3]$.

Erläuterung: Wie üblich bezeichnet $[X, Y] := \mathcal{C}(X, Y)/\simeq$ die Menge aller Homotopieklassen stetiger Abbildungen $f : X \rightarrow Y$. Wir haben hier die Aussage $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3] \neq \{[*]\}$ bewiesen.

5D. Sind die Räume $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3$ und \mathbb{S}^5 homotopie-äquivalent?*Begründete Antwort:*

- ▶ Es gilt $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3] \neq \{[*]\}$ dank 5C, aber $[\mathbb{S}^2, \mathbb{S}^5] = \{[*]\}$ dank 2C.
- ▶ Demnach kann es keine Homotopie-Äquivalenz geben, kurz $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^3 \not\simeq \mathbb{S}^5$.

Erläuterung: Jede Homotopie-Äquivalenz $X \simeq Y$ induziert eine Bijektion $[Z, X] \cong [Z, Y]$.

Per Kontraposition folgt aus $[Z, X] \not\cong [Z, Y]$, dass X und Y nicht homotopie-äquivalent sind.

Aufgabe 6. Abbildung von SO_3 auf \mathbb{RP}^3 ($3+2+3+1 = 9$ Punkte)

6A. Im Produktraum $X = \mathbb{S}^n \times [0, 2\pi]$ schlagen wir $\mathbb{S}^n \times \{0\}$ zusammen und separat $\mathbb{S}^n \times \{2\pi\}$. Dies definiert die Äquivalenzrelation $(s, t) \sim (s', t')$ durch $(s, t) = (s', t')$ oder $t = t' \in \{0, 2\pi\}$. Nennen Sie einen zu X/\sim homöomorphen Raum $Y \subset \mathbb{R}^m$ und zum Beleg eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, die eine Bijektion $\bar{p} : X/\sim \rightarrow Y$ induziert. (Ein Beweis hierfür wird nicht verlangt.)

- ▶ Der Quotientenraum X/\sim ist homöomorph zur Sphäre $\mathbb{S}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$ dank Kugelkoordinaten
- ▶▶ $p : X \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$ mit $p(s, t) = (\cos(t/2), \sin(t/2)s)$ wobei $s \in \mathbb{S}^n$ und $t \in [0, 2\pi]$.

Erläuterung: Die Abbildung p ist stetig. Ihr Bild ist $p(\mathbb{S}^n \times [0, 2\pi]) = \mathbb{S}^{n+1}$.

Es gilt $p(s, t) = p(s', t')$ genau dann, wenn $(s, t) = (s', t')$ oder $t = t' \in \{0, 2\pi\}$.

Somit induziert p dank kanonischer Faktorisierung eine stetige Bijektion $\bar{p} : X/\sim \rightarrow \mathbb{S}^{n+1}$.

6B. Warum ist die stetige Bijektion $\bar{p} : X/\sim \rightarrow Y$ aus 6A ein Homöomorphismus?

- ▶ Der Produktraum $X = \mathbb{S}^n \times [0, 2\pi]$ ist kompakt, somit auch der Quotient X/\sim . Der euklidische Raum \mathbb{R}^{n+2} ist hausdorffsch (2M), somit auch der Teilraum \mathbb{S}^{n+1} .
- ▶ Die stetige Bijektion \bar{p} ist abgeschlossen (3B), also ein Homöomorphismus.

Erläuterung: Ein Lob auf die Kompaktheit! Andernfalls gibt es stetige Bijektionen, die keine Homöomorphismen sind, etwa $f : [0, 1[\rightarrow \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi it}$.

6C. Die Drehung $\rho(s, t) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um die Achse $s \in \mathbb{S}^2$ mit dem Winkel $t \in [0, 2\pi]$ ist $x \mapsto x + \sin(t) \cdot s \times x + (1 - \cos(t)) \cdot s \times (s \times x)$. Wir erhalten so eine stetige Surjektion $\rho : \mathbb{S}^2 \times [0, 2\pi] \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$. Konstruieren Sie hieraus eine stetige Surjektion $h : \mathbb{S}^3 \twoheadrightarrow \mathrm{SO}_3$ und einen Homöomorphismus $\bar{h} : \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$.

- ▶ Die Abbildung ρ schlägt $\mathbb{S}^2 \times \{0\}$ zusammen und ebenso $\mathbb{S}^2 \times \{2\pi\}$. Sie faktorisiert also durch den Quotienten p gemäß $\rho = h \circ p$ zur stetigen Surjektion $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{SO}_3$ mit $h(p(s, t)) = \rho(s, t)$.
- ▶ Nach Konstruktion identifiziert h gegenüberliegende Punkte $\pm x$ in \mathbb{S}^3 , weiter nichts.
- ▶ Auf dem Quotienten $\mathbb{RP}^3 = \mathbb{S}^3/\{\pm 1\}$ erhalten wir die stetige Bijektion $\bar{h} : \mathbb{RP}^3 \xrightarrow{\sim} \mathrm{SO}_3$ mit $\bar{h}(\pm p(s, t)) = \rho(s, t)$. Diese ist ein Homöomorphismus, erneut dank Kompaktheit und (3B).

Erläuterung: Surjektivität und Injektivität sind hier leicht zu erkennen. Die kanonische Faktorisierung leistet wie so oft die Basisarbeit, liefert aber im Allgemeinen nur eine stetige Bijektion. In günstigen Fällen wie hier erhalten wir dank Kompaktheit einen Homöomorphismus.

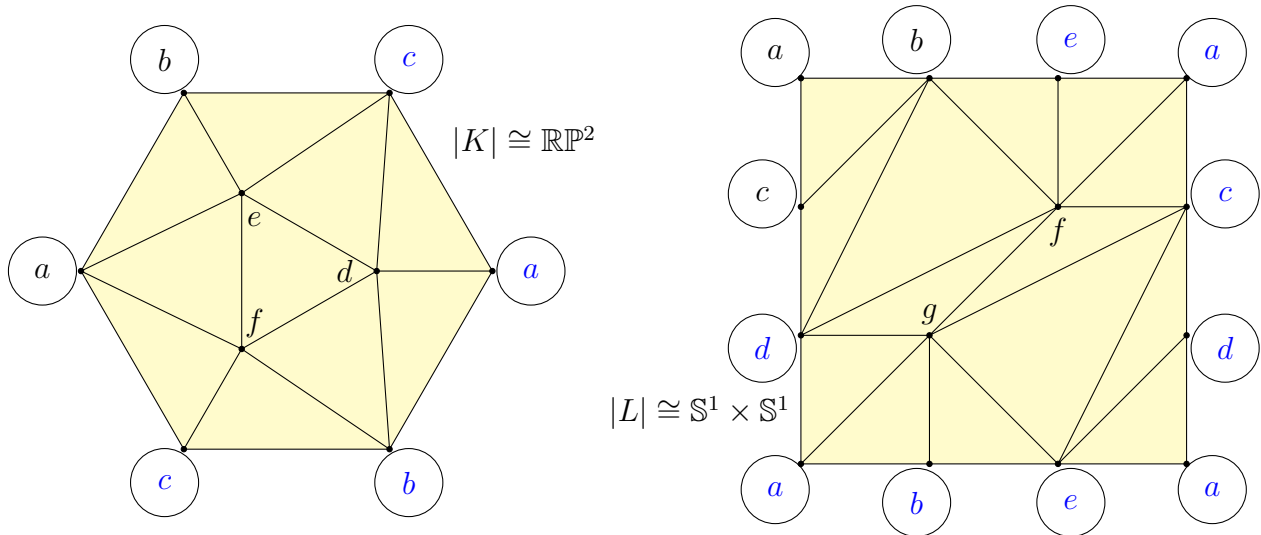
6D. Geben sie einen geschlossenen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathrm{SO}_3$ an, der nicht zusammenziehbar ist.

- ▶ Der geschlossene Weg $\gamma(t) = \rho(e_3, 2\pi t)$ in SO_3 ist nicht zusammenziehbar.

Erläuterung: Die Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathrm{SO}_3, 1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ wurde in der Vorlesung berechnet, simplizial durch Ankleben von Zellen, oder eleganter anhand der Überlagerung $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathrm{SO}_3$.

Aufgabe 7. *Simpliziale Flächen* ($4+2+2+1+2 = 11$ Punkte)

7A. Die folgende Graphik zeigt Simplicialkomplexe K und L : Beschriften Sie K so mit Ecken a, b, c, d, e, f , dass eine Triangulierung der projektiven Ebene $\mathbb{R}P^2$ entsteht. Beschriften Sie L so mit Ecken a, b, c, d, e, f, g , dass eine Triangulierung der Torusfläche $S^1 \times S^1$ entsteht. (Gleich bezeichnete Ecken werden identifiziert, Kanten und Dreiecke sind die in der Ebene gezeigten.)



7B. Aus K entfernen wir das zentrale Dreieck $\{d, e, f\}$ und betrachten $M := K \setminus \{\{d, e, f\}\}$. Berechnen Sie $\chi(M)$. Welche Fläche ist dies? (Es genügt der Name oder das Modell $F_{g,r}^\pm$.)

► Dies ist das Möbius-Band $F_{0,1}^-$, wie wir aus Erfahrung wissen oder ausrechnen:
 ► Es gilt $\chi(M) = 6 - 15 + 9 = 0$, zudem ist M nicht-orientierbar und hat eine Randkomponente. Demnach gilt $g = 1 - \chi - r = 0$ und dank Flächenklassifikationssatz $|M| \cong F_{0,1}^-$.

7C. Die simpliciale Fläche $N := (M_1 \sqcup M_2) / \sim$ entsteht durch zwei Kopien von M , wobei wir $d_1 = d_2, e_1 = e_2, f_1 = f_2$ verkleben. Berechnen Sie $\chi(N)$. Welche Fläche erhalten wir?

► Dies ist die Kleinsche Flasche F_1^- , wie wir aus Erfahrung wissen oder ausrechnen:
 ► Es gilt $\chi(N) = 2\chi(M) - 3 + 3 = 0$, ebenso wie M ist N nicht-orientierbar aber randlos. Demnach gilt $g = 1 - \chi - r = 1$ und dank Flächenklassifikationssatz $|N| \cong F_{1,0}^-$.

7D. Geben Sie in (K, a) einen nicht-zusammenziehbaren, geschlossenen Kantenzug an.

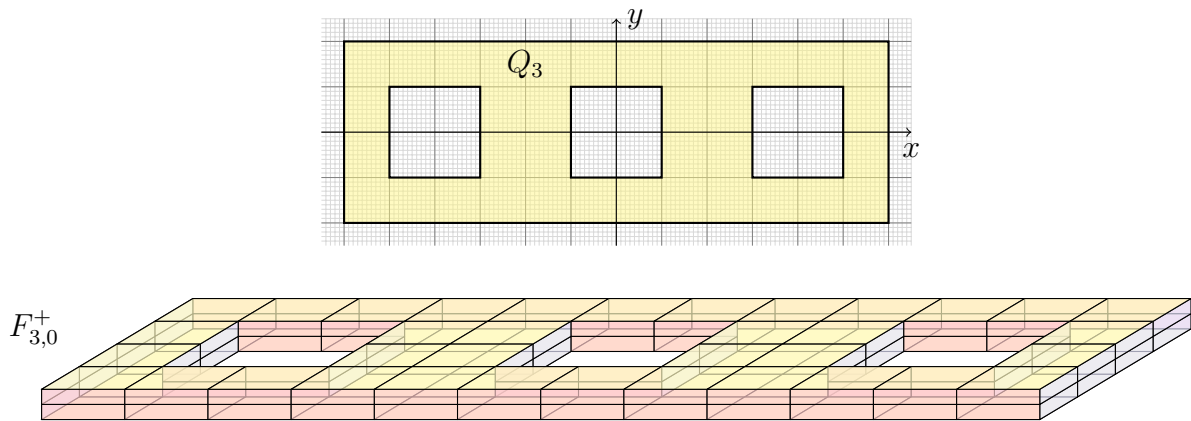
► In (K, a) ist der Kantenzug $abca$ bzw. der Weg $\gamma = |abca|$ nicht zusammenziehbar.
Erläuterung: Wegen $\pi_1(|K|, a) = \{[1], [\gamma]\}$ ist jeder andere hierzu homotop.

7E. Geben Sie in (L, a) zwei geschlossene Kantenzüge an, die die Gruppe $\pi_1(L, a)$ erzeugen.

►► Die Kantenzüge $abea$ und $acda$ erzeugen $\pi_1(L, a) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
Erläuterung: Für den Torus gilt $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \pi_1(S^1) \times \pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Aufgabe 8. *Quotienten von Flächen* ($2+2+2+2+2+2+2 = 14$ Punkte)

Wie in der Vorlesung sei $F_{g,r}^\pm$ die zusammenhängende Modellfläche vom Geschlecht $g \geq 0$ mit $r \geq 0$ Randkomponenten und Orientierbarkeit \pm . Die Skizze zeigt $F_{3,0}^+ = \partial H_3$ im \mathbb{R}^3 als Rand des Henkelkörpers $H_3 = Q_3 \times [-1, 1]$ über folgendem Grundriss:



Jeder der folgenden Quotienten von $F_{3,0}^+$ ist homöomorph zu einer Fläche $F_{g,r}^\pm$: zu welcher?

- 8A. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (-x, -y, -z)$ ist homöomorph zu: $F_{3,0}^-$
- 8B. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (x, y, -z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfläche $Z = \{ (x, y, z) \in F_{3,0}^+ \mid z \geq 0 \}$. $F_{0,4}^+ \cong Z$
- 8C. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (x, -y, z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfläche $Y = \{ (x, y, z) \in F_{3,0}^+ \mid y \geq 0 \}$. $F_{0,4}^+ \cong Y$
- 8D. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (-x, y, z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie die Teilfläche $X = \{ (x, y, z) \in F_{3,0}^+ \mid x \geq 0 \}$. $F_{1,2}^+ \cong X$
- 8E. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (x, -y, -z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Teilfläche X, Y, Z . $F_{0,0}^+ \cong \mathbb{S}^2$
Sphäre
- 8F. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (-x, y, -z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Teilfläche X, Y, Z . $F_{1,0}^+ \cong \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$
Torus
- 8G. Der Quotient von $F_{3,0}^+$ modulo $(x, y, z) \sim (-x, -y, z)$ ist homöomorph zu:
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Teilfläche X, Y, Z . $F_{2,0}^+$
Doppeltorus

Erläuterung: Man nutzt die genannten Teilflächen und identifiziert ggf. entlang des Randes.