

Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Name des Tutors:

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/1	/10	/8	/7	/6	/8	/40

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	0.90	0.82	0.74	0.67	0.61	0.55	0.50	0.45	0.41	0.37	0.33	0.30	0.27	0.25	0.22	0.20	0.18	0.17	0.15	0.14

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* ($2+2+2+2+2 = 10$ Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Hat jeder stetig differenzierbare Weg $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine endliche Länge?

Begründete Antwort:

Frage 2B. Hat die Differentialgleichung $(y')^2 = 1 - y^2$ mit $y(0) = 1$ nur eine Lösung $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

Frage 2C. Die holomorphe Funktion $f(z) = \exp(-z^2/2)$ integrieren wir längs des Weges $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = e^{2\pi i t}$. Gilt für das komplexe Wegintegral dann $\int_{\gamma} f(z) dz = \sqrt{2\pi}$?

Begründete Antwort:

Frage 2D. Existiert zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ eine Basis des \mathbb{C}^2 aus Eigenvektoren von A ?

Begründete Antwort:

Frage 2E. Sei $U = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 > 0 \}$ der dreidimensionale Raum ohne die z -Achse und $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein rotationsfreies Vektorfeld, also $\text{rot}(f) = 0$. Hat f ein Potential?

Begründete Antwort:

Aufgabe 3. *Differentialgleichungen* (4+4 = 8 Punkte)**Frage 3A.** Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 0$.

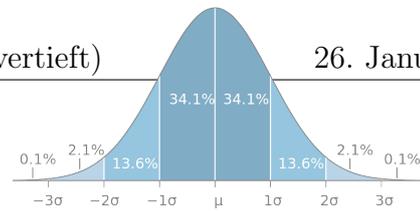
Charakteristisches Polynom $p(x) =$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind:

Allgemeine Lösung $u(x) =$

Frage 3B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $v''(x) - 6v'(x) + 9v(x) = \cos(3x)$.*Rechnung:*

Partikulärlösung $v(x) =$

**Aufgabe 4. Wahrscheinlichkeit (3+4 = 7 Punkte)**

Frage 4A. Ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wird 6 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ergeben sich genau 2 Treffer? Geben Sie den exakten Wert als gekürzten Bruch.

Rechnung:

Antwort: $P =$

Frage 4B. Ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wird 1800 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ergeben sich mindestens 570 und höchstens 630 Treffer? Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung den Wert in Prozent auf 1% gerundet. (Tabelle auf Seite 2. Eine Fehlerabschätzung zur Approximation wird hier nicht verlangt.)

Rechnung:

Antwort: $P \approx$

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme (3+3 = 6 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = Ay$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Ist v ein Hauptvektor von A zum Eigenwert 0? Wenn ja, welcher Stufe?

Rechnung&Antwort:

Frage 5B. Lösen Sie $y'(x) = Ay(x)$ mit Anfangswert $y(0) = v$.

Lösung:

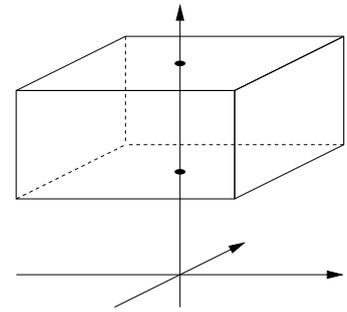
$$y(x) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Integralsätze (2+2+2+2=8 Punkte)

Wir betrachten das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x, y, z^2)$ auf dem Quader

$$Q = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq 1, |y| \leq 1, 1 \leq z \leq 2 \}.$$

mit Deckel D ($z = 2$), Boden B ($z = 1$) und Seitenwand W ($x = 1$).



Frage 6A. Berechnen Sie das Volumenintegral der Divergenz:

$$\text{Divergenz } \operatorname{div}(f) =$$

$$\text{Volumenintegral } \int_Q \operatorname{div}(f) \, d(x, y, z) =$$

Frage 6B. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch den Deckel nach oben:

$$\text{Einheitsnormalenvektor } n_D =$$

$$\text{Flussintegral } \int_D \langle f \mid n_D \rangle \, |dS| =$$

Frage 6C. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch den Boden nach unten:

$$\text{Einheitsnormalenvektor } n_B =$$

$$\text{Flussintegral } \int_B \langle f \mid n_B \rangle \, |dS| =$$

Frage 6D. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch eine Seitenwand nach außen:

$$\text{Einheitsnormalenvektor } n_W =$$

$$\text{Flussintegral } \int_W \langle f \mid n_W \rangle \, |dS| =$$

(Dank Rotationssymmetrie ist das Ergebnis für die verbleibenden drei Wände dasselbe. Sie können nun ihre Einzelergebnisse mit dem passenden Integralsatz überprüfen.)