Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung
Tutor: Musterlösung	

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/1	/10	/8	/7	/6	/8	/40

Aufgabe 2. *Verständnisfragen* (*2+2+2+2+2 = 10 Punkte*)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Hat jeder stetige Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ endliche Länge?

Begründete Antwort:

▶ Nein, Stetigkeit zu fordern ist nicht genug.

▶ Die Kochkurve ist ein Gegenbeispiel.

Frage 2B. Wir würfeln mit einem fairen sechsseitigen Würfel und wiederholen dies unabhängig. Sei X_k die Augenzahl im k–ten Wurf und $M_n := \frac{X_1+\dots+X_n}{n}$ der empirische Mittelwert der ersten n Würfe. Gilt dann $\lim_{n\to\infty} P(M_n \le 3) \to 0$?

Begründete Antwort:

▶ Ja. Denn der Mittelwert bei einmaligem Würfeln liegt mit 3.5 strikt über Drei.

▶ Die Behauptung folgt aus dem schwachen Gesetz der großen Zahlen (die Varianz bei einmaligem Würfeln ist natürlich endlich, daher können wir diesen Satz in der Tat anwenden).

Frage 2C. Ist eine der folgenden Matrizen über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar?

$$A_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Begründete Antwort:

▶ Nein, beide Matrizen sind nicht über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

▶ Es ist e_2 Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert 0 von A_1. Bei A_2 ist e_1 Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert 1.

Frage 2D. Die auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ definierte holomorphe Funktion $f(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i} z}$ integrieren wir längs des Weges $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} t}$. Gilt für das komplexe Wegintegral dann $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$?

Begründete Antwort:

▶ Nein, denn f hat eine Polstelle in $z = 0$.

▶ Es gilt $\operatorname{res}_0(f) = 1$. Daher $\int_\gamma \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}$ nach dem Residuensatz. Also $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 1$

Frage 2E. Sei $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 0 \,\}$ der dreidimensionale Raum ohne den Ursprung und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein rotationsfreies Vektorfeld, also $\operatorname{rot}(f) = 0$. Hat f ein Potential?

Begründete Antwort:

▶ Ja, das gilt immer.

▶ Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig und hinreichend für die Existenz eines Potentials, da das Gebiet $\{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 > 0 \,\}$ einfach zusamenhängend ist.

Aufgabe 3. *Differentialgleichungen (4+4 = 8 Punkte)*

Frage 3A. Lösen Sie $yy' + 2\sin(x) = 0$ mit Anfangswert $y(0) = 1$. Wie lautet das maximale Definitionsintervall der Lösung (es werden keine Dezimalzahlen verlangt)?

Rechnung und Antwort: (Vgl. die Lösungen zu den Übungen der Vorlesung von Blatt 8.)
►► Trennung der Variablen: $2yy' = -4\sin(x)$. Integration liefert $y^2 = 4\cos(x) + c$ mit einer beliebigen Konstanten $c \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $y = +\sqrt{4\cos x + c}$ oder $y = -\sqrt{4\cos x + c}$.
► Die Bedingung $y(0) = 1$ bestimmt $y = \sqrt{4\cos x + c}$ und $c = -3$.
► Die Lösung $y = \sqrt{4\cos x - 3}$ hat als maximales Definitionsintervall $I =]-a, a[$ mit $a = \arccos(3/4)$.

Frage 3B. Lösen Sie $y' = (x + y)^2$ mit Hilfe der Substitution $z = x + y$. Wie lautet das maximale Definitionsintervall der so gefundenen Lösungen? (Falls es für Sie hilfreich ist: eine Stammfunktion von $\frac{1}{1+t^2}$ ist $\arctan(t)$.)

Rechnung und Antwort: Substitution: $z = x + y$.
► Es folgt $z' = 1 + y' = 1 + z^2$.
► Trennung der Variablen:

$$\int_{z_0}^{z} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}s$$

Stammfunktion von $\frac{1}{1+t^2}$ ist $\arctan t$. Daher

$$\arctan(z) - \arctan(z_0) = x - x_0$$

► Dann gilt $z = \tan(x + c)$, also $y = z - x = \tan(x + c) - x$.
► Maximales Definitionsintervall ist $]-\frac{\pi}{2} - c, \frac{\pi}{2} - c[$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4. *Wahrscheinlichkeit (3+4 = 7 Punkte)*

Frage 4A. Eine faire Münze wird 10 mal unabhängig geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P wird genau drei mal Kopf geworfen? Geben Sie den exakten Wert als gekürzten Bruch.

Rechnung:

▶ Die Anzahl k der Treffer ist binomialverteilt, $B(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.

▶▶ Für $n = 10$ Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit $t = 1/2$ und $k = 3$ Treffern finden wir

$$\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{1}{1024} = \frac{5\cdot 3\cdot 8}{128\cdot 8} = \frac{15}{128} \quad (\approx 0.12)$$

Antwort: $P = \frac{15}{128}$

Frage 4B. Bei einem Chip mit zwei Milliarden Transistoren fällt jeder mit Wahrscheinlichkeit 10^{-9} unabhängig von allen anderen aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit W fallen höchstens 3 Transistoren aus? Nutzen Sie eine geeignete Näherung, um den Wert in Prozent auf 1% gerundet zu berechnen. (In Ihren Berechnungen können Sie $19/\mathrm{e}^2 = 2.571\ldots$ nutzen. Eine Fehlerabschätzung wird nicht verlangt.)

Rechnung:

▶ Eine sehr gute Näherung ist die Poisson–Verteilung $P(\lambda)(k) = \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$.

▶ Bei $n = 2\cdot 10^9$ Versuchen mit Wahrscheinlichkeit $p = 10^{-9}$ gilt $\lambda = np = 2$.

▶▶ Die Wahrscheinlichkeit für höchstens drei Ausfälle ist demnach

$$A = \left(\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda^1}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!}\right)\mathrm{e}^{-2} = \left(\frac{1}{1} + \frac{2}{1} + \frac{4}{2} + \frac{8}{6}\right)\mathrm{e}^{-2} = \frac{19}{3}\mathrm{e}^{-2} \approx 0.857\cdots \approx 86\%$$

Antwort: $W \approx$ 86%

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme* (*3+3 = 6 Punkte*)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = A\,y$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Ist v ein Hauptvektor von A zum Eigenwert 1? Wenn ja, welcher Stufe?

Rechnung&Antwort: ▶▶▶ Direkte Anwendung der Definition ergibt:

$$(A - Id) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - Id) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Demnach ist v ein Hauptvektor 2. Stufe zum Eigenwert 1.

Frage 5B. Lösen Sie $y'(x) = A\,y(x)$ mit Anfangswert $y(0) = v$.

Lösung: ▶▶▶ Die Lösungsformel liefert hier $y(x) = e^x(v + x(Av - v))$, also:

$$y(x) = \begin{pmatrix} \boxed{e^x} \\ \boxed{-xe^x} \\ \boxed{e^x + xe^x} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. *Integralsätze* (*1+2+2+2+1 = 8 Punkte*)

Gegeben sei der Vollzylinder Z mit

$$Z = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 \leq 1,\, 0 \leq z \leq 2 \right\}.$$

Der Rand von Z besteht aus drei glatten Flächenstücken,

$$\text{dem Boden } B := \left\{ (x, y, z) \in Z \;\middle|\; z = 0 \right\},$$
$$\text{dem Deckel } D := \left\{ (x, y, z) \in Z \;\middle|\; z = 2 \right\},$$

und dem Mantel M. Betrachtet wird das Vektorfeld

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2zx, & 2zy, & z^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 6A. Skizzieren Sie den Körper Z und die Randflächen B, D und M.

Skizze: ▶ Ein senkrecht auf der x,y-Ebene stehender zweidimensionaler Zylinder mit Radius Eins und Höhe Zwei.

Frage 6B. Berechnen Sie das Volumenintegral der Divergenz über Z.

$\operatorname{div} f =$ ▶ $2z + 2z + 2z = 6z$

Volumenintegral der Divergenz $\int_Z \operatorname{div} f \,|\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z| =$ ▶ $\operatorname{vol}_2(B)\, 6\, [\frac{1}{2} z^2]_0^2 = 12\pi$

Frage 6C. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch den Deckel nach oben.

Einheitsnormalenvektor $n_D =$ ▶ $(0, 0, 1)$

Flussintegral $\int_D \langle\, f \mid n_D \,\rangle\, |\mathrm{d}S| =$ ▶ $\int_D 5\, |\mathrm{d}S| = 5 \operatorname{vol}_2(D) = 5\pi$

Frage 6D. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch den Boden nach unten:

Einheitsnormalenvektor $n_B =$ ▶ $(0, 0, -1)$

Flussintegral $\int_B \langle\, f \mid n_B \,\rangle\, |\mathrm{d}S| =$ ▶ $\int_B 1\, |\mathrm{d}S| = (-1) \operatorname{vol}_2(D) = -\pi$

Frage 6E. Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes von Gauß das Flussintegral von f durch den Mantel nach außen:

Flussintegral $\int_M \langle\, f \mid n_M \,\rangle\, |\mathrm{d}S| - \pi + 5\pi = 12\pi$ ▶ Es folgt, dass das Flussintegral von f durch den Mantel nach außen durch 8π gegeben ist.
