Scheinklausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Name des Tutors: Musterlösung

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 6 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Die Aufgaben sind untereinander **unabhängig**. Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig. (Tipp: Verbeißen Sie sich nicht zu lange in eine Frage.)
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Gesamt
Punkte	/1	/10	/8	/7	/6	/8	/40

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	0.90	0.82	0.74	0.67	0.61	0.55	0.50	0.45	0.41	0.37	0.33	0.30	0.27	0.25	0.22	0.20	0.18	0.17	0.15	0.14

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2 = 10 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Hat jeder stetig differenzierbare Weg $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ eine endliche Länge?

Begründete Antwort:

►► Ja. (Für stetig differenzierbare Wege gilt dies immer, aber Stetigkeit allein reicht nicht.)
Dank Weglängenformel gilt $\ell(\gamma) = \int_0^1 |\gamma'(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$. (Der Integrand ist stetig, also beschränkt.)

Frage 2B. Hat die Differentialgleichung $(y')^2 = 1 - y^2$ mit $y(0) = 1$ nur eine Lösung $y\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$?

Begründete Antwort:

►► Nein. (Der Eindeutigkeitssatz versagt hier, und es gibt tatsächlich Gegenbeispiele.)
Neben $u(x) = 1$ gibt es (unendlich viele) weitere Lösungen, zum Beispiel $v(x) = \cos(x)$.

Frage 2C. Die holomorphe Funktion $f(z) = \exp(-z^2/2)$ integrieren wir längs des Weges $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = \mathrm{e}^{2\pi i t}$. Gilt für das komplexe Wegintegral dann $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}$?

Begründete Antwort:

►► Nein, denn es gilt $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ dank Cauchy–Integralsatz für holomorphe Funktionen.
Alternativ: Der Residuensatz ergibt für das Integral 0, denn f hat keine Singularitäten.
Alternativ: f lässt sich auf $\mathbb{C}$ in eine Potenzreihe entwickeln und besitzt eine Stammfunktion.
Alternativ: Als Vektorfeld aufgefasst gilt $\operatorname{rot}(f) = 0$ und $\mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.

Frage 2D. Existiert zu jeder Matrix $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ eine Basis des $\mathbb{C}^2$ aus Eigenvektoren von A?

Begründete Antwort:

►► Nein. (Das wäre doch zu schön, aber leider müssen wir uns mit Hauptvektoren mühen.) Gegenbeispiel ist eine Jordan–Matrix

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

(Das charakteristische Polynom ist $p(x) = (x-\lambda)^2$ aber der Kern von $A-\lambda$ ist eindimensional.)

(Die Tatsache, dass ein Eigenwert doppelt vorkommt, besagt allein noch gar nichts, zum Beispiel ist $\left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$ diagonalisierbar, sogar schon diagonal. Die geometrische Vielfachheit *kann* kleiner sein als die algebraische, aber wirklich überzeugend ist erst ein konkretes Gegenbeispiel.)

Frage 2E. Sei $U = \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 > 0 \,\}$ der dreidimensionale Raum ohne die z–Achse und $f\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein rotationsfreies Vektorfeld, also $\operatorname{rot}(f) = 0$. Hat f ein Potential?

Begründete Antwort:

►► Nein, im Allgemeinen gilt dies nicht. (Die Bedingung $\operatorname{rot}(f) = 0$ ist notwendig für die Existenz eines Potentials, aber hinreichend erst für einfach zusammenhängende Gebiete. Das Gebiet U ist nicht einfach zusammenhängend, also hat vermutlich nicht jedes Vektorfeld ein Potential. Wirklich überzeugend ist aber auch hier erst ein konkretes Gegenbeispiel.)
Ein konkretes Gegenbeispiel ist das Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters entlang der z–Achse. (In Formeln etwa $f(x,y,z) = (-y,x,0)/(x^2+y^2)$, analog zum Beispiel in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$.)

Aufgabe 3. *Differentialgleichungen (4+4 = 8 Punkte)*

Frage 3A. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $u''(x) - 6u'(x) + 9u(x) = 0$.

Charakteristisches Polynom $p(x) = \; x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$

Die Nullstellen von $p(x)$ sind: 3 ist doppelte Nullstelle

Allgemeine Lösung $u(x) = \; (c_0 + c_1 x)\,\mathrm{e}^{3x}$ mit $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$

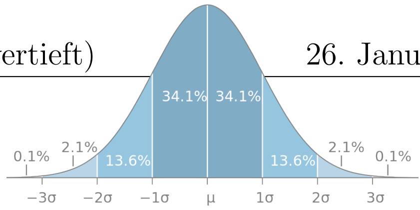
Frage 3B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $v''(x) - 6v'(x) + 9v(x) = \cos(3x)$.

Rechnung:

►► Für die rechte Seite $\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$ liegt keine Resonanz vor.
Also bringt der Realteil des komplexen Ansatzes $v(x) = c\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$ eine Lösung.
►► Ableiten: $v'(x) = 3\mathrm{i}c\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$ und $v''(x) = -9c\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$.
Einsetzen: $v'' - 6v' + 9v = -18\mathrm{i}c\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x} \stackrel{!}{=} \mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}$.
Auflösen: $c = \mathrm{i}/18$, also $v(x) = -\frac{1}{18}\sin(3x) + \frac{\mathrm{i}}{18}\cos(3x)$.

Alternativ: Der reelle Ansatz $v(x) = a\cos(3x) + b\sin(3x)$ bringt eine Lösung.
Ableiten: $v'(x) = 3b\cos(3x) - 3a\sin(3x)$ und $v''(x) = -9a\cos(3x) - 9b\sin(3x)$.
Einsetzen: $v'' - 6v' + 9v = -18b\cos(3x) + 18a\sin(3x)$.
Auflösen: $a = 0$ und $b = -1/18$. (Probe)

Partikulärlösung $v(x) = \; -\dfrac{1}{18}\sin(3x)$



Aufgabe 4. *Wahrscheinlichkeit (3+4 = 7 Punkte)*

Frage 4A. Ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wird 6 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ergeben sich genau 2 Treffer? Geben Sie den exakten Wert als gekürzten Bruch.

Rechnung:

▶ Die Anzahl k der Treffer ist binomialverteilt, $B(n,t)(k) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$.

▶▶ Für $n = 6$ Versuche mit Trefferwahrscheinlichkeit $t = 1/3$ und $k = 2$ Treffern finden wir

$$\binom{6}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot\frac{1}{3^2}\cdot\frac{2^4}{3^4} = \frac{5\cdot 2^4}{3^5} = \frac{80}{243} \quad (\approx 0.329)$$

(Gefragt war hier der exakte Wert als gekürzter Bruch! Die Poisson–Verteilung ist in diesem Fall eine schlechte Näherung, und den exakten Wert kann sie gar nicht liefern. Das beliebte Geburtstagsparadox hat mit der Frage übrigens nichts zu tun.)

Antwort: $P = \dfrac{80}{243}$

Frage 4B. Ein Zufallsexperiment mit Trefferwahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ wird 1800 mal unabhängig wiederholt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit P ergeben sich mindestens 570 und höchstens 630 Treffer? Berechnen Sie mit Hilfe der Normalverteilung den Wert in Prozent auf 1% gerundet. (Tabelle auf Seite 2. Eine Fehlerabschätzung zur Approximation wird hier nicht verlangt.)

Rechnung:

▶▶ Erwartungswert $\mu = 1800 \cdot \frac{1}{3} = 600$, Varianz $\sigma^2 = 1800 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = 400$, Streuung $\sigma = 20$.

▶▶ Zwischen 570 und 630 Treffer bedeutet Abweichung von -1.5σ bis 1.5σ vom Mittelwert. Etwas genauer ist $\alpha = (570 - \mu - 1/2)/\sigma = -1.525$ und $\beta = (630 - \mu + 1/2)/\sigma = 1.525$. Wir suchen also $P = \int_{-1.525}^{1.525} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{1.525} \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Je nach verwendeter Rundung liegt der abgelesene Wert zwischen 0.433 und 0.437, also die Näherung für P zwischen 0.866 und 0.874. Somit erhält man $P \approx 87\%$.

Antwort: $P \approx$ 87%

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme (3+3 = 6 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y' = A\,y$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Ist v ein Hauptvektor von A zum Eigenwert 0? Wenn ja, welcher Stufe?

Rechnung&Antwort: ▶▶▶ Direkte Anwendung der Definition ergibt:

$$A \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

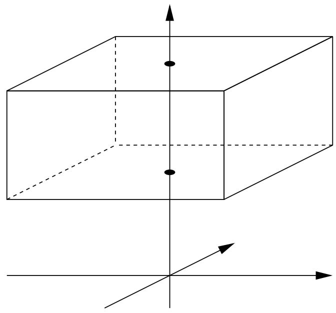
Demnach ist v ein Hauptvektor 3. Stufe zum Eigenwert 0.

Frage 5B. Lösen Sie $y'(x) = A\,y(x)$ mit Anfangswert $y(0) = v$.

Lösung: ▶▶▶ Die Lösungsformel liefert hier $y(x) = v + xAv + \frac{1}{2}x^2A^2v$, also:

$$y(x) = \begin{pmatrix} \boxed{-1 + x} \\ \boxed{-1 + x - x^2/2} \\ \boxed{1 + x^2/2} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. *Integralsätze* (*2+2+2+2=8 Punkte*)



Wir betrachten das Vektorfeld $f(x,y,z) = (x, y, z^2)$ auf dem Quader

$$Q = \{\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \le 1,\ |y| \le 1,\ 1 \le z \le 2\ \}.$$

mit Deckel D ($z = 2$), Boden B ($z = 1$) und Seitenwand W ($x = 1$).

Frage 6A. Berechnen Sie das Volumenintegral der Divergenz:

Divergenz $\operatorname{div}(f) = \ 2 + 2z$

Volumenintegral $\displaystyle\int_Q \operatorname{div}(f)\, \mathrm{d}(x,y,z) =$

$$\int_{x=-1}^{1} \int_{y=-1}^{1} \int_{z=1}^{2} 2 + 2z \,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = 4\Big[2z + z^2\Big]_{z=1}^{2} = 20$$

Frage 6B. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch den Deckel nach oben:

Einheitsnormalenvektor $n_D = \ (0,0,1)$

Flussintegral $\displaystyle\int_D \langle\, f \mid n_D \,\rangle\, |\mathrm{d}S| =$

$$\int_D 4\, |\mathrm{d}S| = 4 \operatorname{vol}_2(D) = 16$$

Frage 6C. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch den Boden nach unten:

Einheitsnormalenvektor $n_B = \ (0,0,-1)$

Flussintegral $\displaystyle\int_B \langle\, f \mid n_B \,\rangle\, |\mathrm{d}S| =$

$$\int_B -1\, |\mathrm{d}S| = -\operatorname{vol}_2(B) = -4$$

Frage 6D. Berechnen Sie das Flussintegral von f durch eine Seitenwand nach außen:

Einheitsnormalenvektor $n_W = \ (1,0,0)$

Flussintegral $\displaystyle\int_W \langle\, f \mid n_W \,\rangle\, |\mathrm{d}S| =$

$$\int_W 1\, |\mathrm{d}S| = 1 \operatorname{vol}_2(W) = 2$$

(Dank Rotationssymmetrie ist das Ergebnis für die verbleibenden drei Wände dasselbe. Sie können nun ihre Einzelergebnisse mit dem passenden Integralsatz überprüfen.)