

Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus! (1 Punkt)*

Name:	Matrikelnummer:
Vorname:	Fachrichtung:

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise**:

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt.
Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben.
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert und untereinander **unabhängig**.
Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

VIEL ERFOLG!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/12	/12	/11	/12	/71

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x :

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t) dt$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}$:

	$x+0.00$	$x+0.01$	$x+0.02$	$x+0.03$	$x+0.04$	$x+0.05$	$x+0.06$	$x+0.07$	$x+0.08$	$x+0.09$
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t) dt \approx 0.49506$.

**Aufgabe 2.** *Verständnisfragen* ($2+2+2+2+2+2 = 12$ Punkte)

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Sie würfeln n -mal unabhängig mit einem fairen sechsseitigen Würfel. Sei X_k die Augenzahl im k -ten Wurf und $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n)$ der empirische Mittelwert der ersten n Würfe. Welche Wahrscheinlichkeit erhält man als Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(3.4 < M_n < 3.6)$?

Begründete Antwort:

Frage 2B. Die Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben durch $f(x + iy) = x^2 + i2xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Ist f holomorph (= stetig komplex differenzierbar = komplex analytisch)?

Begründete Antwort:

Frage 2C. Sei $f: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph (= stetig komplex differenzierbar = komplex analytisch). Welche Werte kann das Residuum $\text{res}_0(f')$ der Ableitung f' annehmen?

Begründete Antwort:

Frage 2D. Sei $A: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ eine stetige Abbildung und seien $u, v: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $u'(x) = A(x)u(x)$ und $v'(x) = A(x)v(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Folgt aus gleichem Anfangswert $u(a) = v(a)$ bereits die Gleichheit $u(x) = v(x)$ für alle $x \in [a, b]$?

Begründete Antwort:

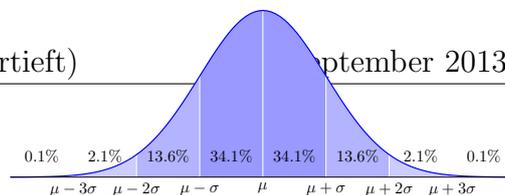
Frage 2E. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(kx)$ die Fourier-Reihe einer quadrat-integrierbaren Funktion?

Begründete Antwort:

Frage 2F. Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)/x$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist über \mathbb{R} nicht absolut integrierbar. Existiert dennoch der Grenzwert $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{-r}^r f(x) dx$?

Begründete Antwort:

Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit* ($3+4+4 = 11$ Punkte)



Frage 3A. (Aus der ZEIT, Mai 2013) Sie würfeln dreimal unabhängig mit einem fairen sechsseitigen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, hierbei mindestens eine Sechs zu würfeln? (Antwort als gekürzter Bruch) Ist diese Wahrscheinlichkeit größer, kleiner oder gleich $1/2$?

Rechnung & Antwort:

Frage 3B. (Aus der NEW YORK TIMES, August 2011) Von drei gleich aussehenden Münzen sind zwei fair, zeigen also Kopf 0 und Zahl 1 mit gleicher Wkt, die dritte ist gezinkt und zeigt Kopf mit Wkt 60%. Sie wählen zufällig eine der Münzen aus und machen einen Testwurf. Wenn Sie Kopf erhalten, mit welcher Wkt ist Ihre Münze gezinkt? (Antwort als gekürzter Bruch)

Rechnung & Antwort:

Frage 3C. Ihre Maschine produziert 19200 Bauteile. Die anschließende Qualitätskontrolle für die höchste Güteklasse besteht jedes Bauteil mit Wkt $1/4$, unabhängig von allen anderen. Mit welcher Wkt erhalten Sie mindestens 4700 Teile höchster Güte? (Antwort auf 1% gerundet)

Rechnung & Antwort:

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen* ($3+3+3+3 = 12$ Punkte)

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen für reelle Funktionen $u, v, w, y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Die Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie ausnutzen.

Frage 4A. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = 0$.

Rechnung:

Allgemeine Lösung $u(x) =$

Frage 4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = e^{2x}$.

Ansatz & Rechnung:

Partikulärlösung $v(x) =$

Frage 4C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = \cos(x)$.

Ansatz & Rechnung:

Partikulärlösung $w(x) =$

Frage 4D. Lösen Sie $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 25 \cos(x)$ mit $y(0) = 5$ und $y'(0) = 1$.

Ansatz & Rechnung:

Lösung $y(x) =$

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme* ($4+2+4+2 = 12$ Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = Ay(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3, Av_4 in \mathbb{C}^4 und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Rechnung & Antwort:

Frage 5B. Schreiben Sie die lineare Abbildung A als Matrix $B = {}_{\mathcal{B}}(A)_{\mathcal{B}}$ bezüglich der Basis $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und lesen Sie hieraus das charakteristische Polynom von A ab.

Antwort:

Frage 5C. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$ der Differentialgleichung $y' = A y$ zu den vorgegebenen Anfangswerten $y_1(0) = (1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ und $y_2(0) = (0, 0, 1, 0) = \frac{i}{2}(v_1 - v_2)$ sowie $y_3(0) = v_3$ und $y_4(0) = v_4$.

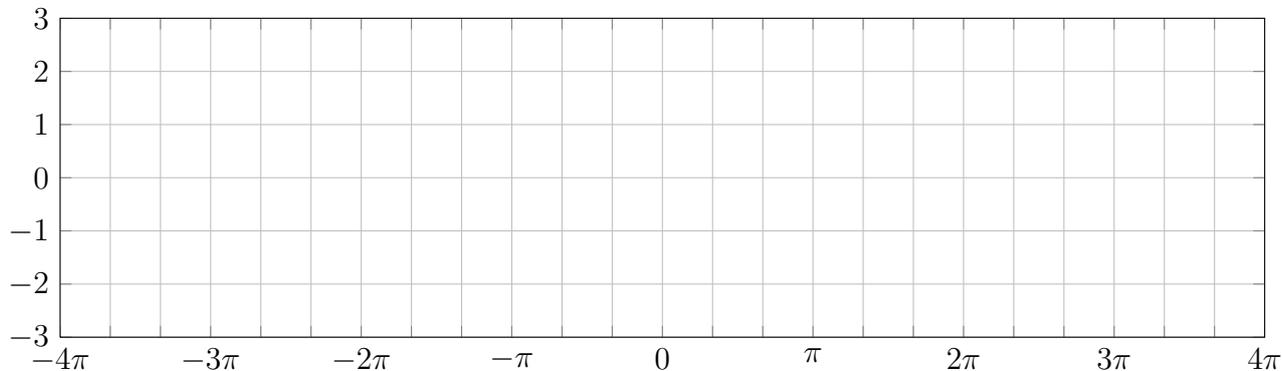
Antwort:

Frage 5D. Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A y(t)$ verfolgen, welchen Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} |y(t)|$ erwarten Sie?

Antwort:

Aufgabe 6. *Fourier-Reihen* (2+3+2+4 = 11 Punkte)

Frage 6A. Sei $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gerade und 2π -periodisch mit $f(x) = 2$ für $0 \leq x \leq \pi/3$ und $f(x) = -1$ für $\pi/3 < x \leq \pi$. Skizzieren Sie f und $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



Frage 6B. Entwickeln Sie f in ihre Fourier-Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Dabei brauchen Ausdrücke wie $\sin(k\pi/3)$ oder $\cos(k\pi/3)$ nicht weiter vereinfacht zu werden.

Rechnung & Antwort:

Frage 6C. Entwickeln Sie F in ihre Fourier-Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$.

Rechnung & Antwort:

Frage 6D. Werten Sie diese Reihen in $x = \pi/3$ aus und bestimmen Sie so die Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\sqrt{3}} \sin(k\pi/3) \cos(k\pi/3) \quad \left(= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots \right) \quad \text{und}$$

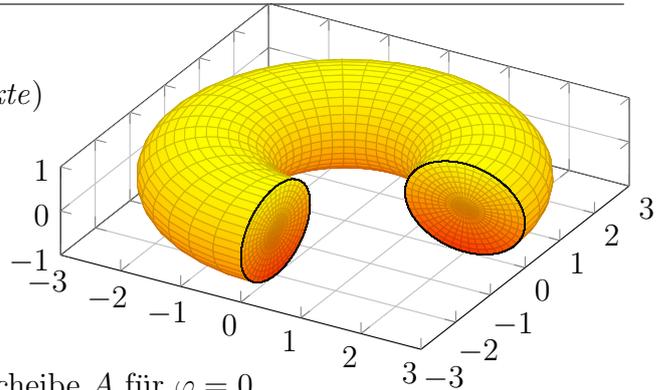
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3k^2} \sin(k\pi/3)^2 \quad \left(= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots \right).$$

Rechnung & Antwort:

Aufgabe 7. Integralsätze (3+3+3+3 = 12 Punkte)

Wir betrachten drei Viertel eines Volltorus:

$$V = \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{l} (2 + \rho \sin \theta) \cos \varphi \\ (2 + \rho \sin \theta) \sin \varphi \\ \rho \cos \theta \end{array} \right) \mid \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \varphi \leq 3\pi/2 \end{array} \end{array} \right\}$$



Die Randfläche $S = \partial V$ besteht aus einer Kreisscheibe A für $\varphi = 0$, einer weiteren Kreisscheibe B für $\varphi = 3\pi/2$, sowie der Mantelfläche C für $\rho = 1$.

Für das Vektorfeld $f(x, y, z) = (x, y, x^2 + 4(y+2)^3)$ gilt $\text{rot}(f)(x, y, z) = (12(y+2)^2, -2x, 0)$.

Frage 7A: Berechnen Sie möglichst geschickt den Fluss von f durch S nach außen.

Rechnung:

Frage 7B: Berechnen Sie die Normale und den Fluss von $\operatorname{rot}(f)$ durch A nach außen.

Normale $\partial_\theta \times \partial_\rho$ auf A :

Flussintegral:

Frage 7C: Berechnen Sie die Normale und den Fluss von $\operatorname{rot}(f)$ durch B nach außen.

Normale $\partial_\rho \times \partial_\theta$ auf B :

Flussintegral:

Frage 7D: Folgern Sie mit einem Integralsatz den Fluss von $\operatorname{rot}(f)$ durch C nach außen.

Rechnung & Antwort: