Klausur zur HM3 (vertieft) für LRT und MaWi

Aufgabe 1. *Bitte füllen Sie folgendes aus!* (*1 Punkt*)

Name: Musterlösung	Matrikelnummer: Musterlösung
Vorname: Musterlösung	Fachrichtung: Musterlösung

Bitte beachten Sie folgende **Hinweise:**

- **Bearbeitungszeit:** 120 Minuten
- **Erlaubte Hilfsmittel:** 10 Seiten DIN A4 eigenhandgeschrieben
- **Mobiltelefone** und ähnliche Geräte müssen während der gesamten Klausur komplett ausgeschaltet bleiben und so verstaut sein, dass sie nicht sichtbar sind.
- Bei allen Aufgaben sind **begründete Antworten** verlangt.
  Sie können diese direkt auf das Aufgabenblatt schreiben.
- Die Aufgaben sind nach Themen gruppiert und untereinander **unabhängig**.
  Innerhalb einer Aufgabe sind die Fragen oft voneinander unabhängig.
- Bearbeitungen mit Bleistift oder Rotstift sind nicht zulässig.

Viel Erfolg!

Den unteren Teil dieses Deckblattes bitte für Korrekturvermerke freilassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Gesamt
Punkte	/1	/12	/11	/12	/12	/11	/12	/71

Nützliche Werte

Tabelle der Exponentialfunktion $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} x^k/k!$ für ausgewählte Werte von x:

x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
e^x	1.11	1.22	1.35	1.49	1.65	1.82	2.01	2.23	2.46	2.72	3.00	3.32	3.67	4.06	4.48	4.95	5.47	6.05	6.69	7.39
e^{-x}	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135

Tabelle für das Integral $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ über die Normalverteilung $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-t^2/2}$:

	x+0.00	x+0.01	x+0.02	x+0.03	x+0.04	x+0.05	x+0.06	x+0.07	x+0.08	x+0.09
$x = 0.0$	0.00000	0.00399	0.00798	0.01197	0.01595	0.01994	0.02392	0.02790	0.03188	0.03586
0.1	0.03983	0.04380	0.04776	0.05172	0.05567	0.05962	0.06356	0.06749	0.07142	0.07535
0.2	0.07926	0.08317	0.08706	0.09095	0.09483	0.09871	0.10257	0.10642	0.11026	0.11409
0.3	0.11791	0.12172	0.12552	0.12930	0.13307	0.13683	0.14058	0.14431	0.14803	0.15173
0.4	0.15542	0.15910	0.16276	0.16640	0.17003	0.17364	0.17724	0.18082	0.18439	0.18793
0.5	0.19146	0.19497	0.19847	0.20194	0.20540	0.20884	0.21226	0.21566	0.21904	0.22240
0.6	0.22575	0.22907	0.23237	0.23565	0.23891	0.24215	0.24537	0.24857	0.25175	0.25490
0.7	0.25804	0.26115	0.26424	0.26730	0.27035	0.27337	0.27637	0.27935	0.28230	0.28524
0.8	0.28814	0.29103	0.29389	0.29673	0.29955	0.30234	0.30511	0.30785	0.31057	0.31327
0.9	0.31594	0.31859	0.32121	0.32381	0.32639	0.32894	0.33147	0.33398	0.33646	0.33891
1.0	0.34134	0.34375	0.34614	0.34849	0.35083	0.35314	0.35543	0.35769	0.35993	0.36214
1.1	0.36433	0.36650	0.36864	0.37076	0.37286	0.37493	0.37698	0.37900	0.38100	0.38298
1.2	0.38493	0.38686	0.38877	0.39065	0.39251	0.39435	0.39617	0.39796	0.39973	0.40147
1.3	0.40320	0.40490	0.40658	0.40824	0.40988	0.41149	0.41308	0.41466	0.41621	0.41774
1.4	0.41924	0.42073	0.42220	0.42364	0.42507	0.42647	0.42785	0.42922	0.43056	0.43189
1.5	0.43319	0.43448	0.43574	0.43699	0.43822	0.43943	0.44062	0.44179	0.44295	0.44408
1.6	0.44520	0.44630	0.44738	0.44845	0.44950	0.45053	0.45154	0.45254	0.45352	0.45449
1.7	0.45543	0.45637	0.45728	0.45818	0.45907	0.45994	0.46080	0.46164	0.46246	0.46327
1.8	0.46407	0.46485	0.46562	0.46638	0.46712	0.46784	0.46856	0.46926	0.46995	0.47062
1.9	0.47128	0.47193	0.47257	0.47320	0.47381	0.47441	0.47500	0.47558	0.47615	0.47670
2.0	0.47725	0.47778	0.47831	0.47882	0.47932	0.47982	0.48030	0.48077	0.48124	0.48169
2.1	0.48214	0.48257	0.48300	0.48341	0.48382	0.48422	0.48461	0.48500	0.48537	0.48574
2.2	0.48610	0.48645	0.48679	0.48713	0.48745	0.48778	0.48809	0.48840	0.48870	0.48899
2.3	0.48928	0.48956	0.48983	0.49010	0.49036	0.49061	0.49086	0.49111	0.49134	0.49158
2.4	0.49180	0.49202	0.49224	0.49245	0.49266	0.49286	0.49305	0.49324	0.49343	0.49361
2.5	0.49379	0.49396	0.49413	0.49430	0.49446	0.49461	0.49477	0.49492	0.49506	0.49520
2.6	0.49534	0.49547	0.49560	0.49573	0.49585	0.49598	0.49609	0.49621	0.49632	0.49643
2.7	0.49653	0.49664	0.49674	0.49683	0.49693	0.49702	0.49711	0.49720	0.49728	0.49736
2.8	0.49744	0.49752	0.49760	0.49767	0.49774	0.49781	0.49788	0.49795	0.49801	0.49807
2.9	0.49813	0.49819	0.49825	0.49831	0.49836	0.49841	0.49846	0.49851	0.49856	0.49861
3.0	0.49865	0.49869	0.49874	0.49878	0.49882	0.49886	0.49889	0.49893	0.49896	0.49900

Ablesebeispiele: Für $x = 1.23$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.39065$. Für $x = 2.58$ gilt $\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.49506$.

Aufgabe 2. *Verständnisfragen (2+2+2+2+2+2 = 12 Punkte)*

Beantworten Sie folgende Fragen und geben Sie eine kurze aber überzeugende Begründung (durch Nennung eines Ergebnisses der Vorlesung oder eines geeigneten Gegenbeispiels).

Frage 2A. Sie würfeln n–mal unabhängig mit einem fairen sechsseitigen Würfel. Sei X_k die Augenzahl im k–ten Wurf und $M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n)$ der empirische Mittelwert der ersten n Würfe. Welche Wahrscheinlichkeit erhält man als Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(3.4 < M_n < 3.6)$?

Begründete Antwort: ▶ Es gilt $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(3.4 < M_n < 3.6) = 1$ ▶ nach dem Gesetz der großen Zahlen. Anschaulich: Der empirische Mittelwert nähert sich dem theoretischen Mittelwert 3.5.

(Es gilt $\mathbf{E}(X_k) = 3.5$ und $\mathbf{V}(X_k) = \sigma^2 < \infty$. Somit $\mathbf{E}(M_n) = 3.5$ und dank Unabhängigkeit $\mathbf{V}(M_n) = \sigma^2/n$. Mit Chebychev folgt $\mathbf{P}(3.4 < M_n < 3.6) \ge 1 - \sigma^2/(100n) \to 1$ für $n \to \infty$.)

Frage 2B. Die Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $f(x + \mathrm{i}y) = x^2 + \mathrm{i}2xy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Ist f holomorph (= stetig komplex differenzierbar = komplex analytisch)?

Begründete Antwort: ▶ Nein. (Zwar ist f reell stetig differenzierbar, nicht aber komplex.)
▶ Dies prüft man am leichtesten mit den Cauchy–Riemann–Differentialgleichungen:
Zwar sind $\partial u/\partial x = 2x$ und $\partial v/\partial y = 2x$ gleich, nicht aber $-\partial u/\partial y = 0$ und $\partial v/\partial x = 2y$.

Frage 2C. Sei $f\colon \mathbb{C} \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph (= stetig komplex differenzierbar = komplex analytisch). Welche Werte kann das Residuum $\operatorname{res}_0(f')$ der Ableitung f' annehmen?

Begründete Antwort: ▶ Nur das Residuum 0 ist möglich. ▶ Für jeden stückweise glatten Weg $\gamma\colon [a, b] \to \mathbb{C} \smallsetminus \{0\}$ gilt $\int_\gamma f'(z)\,\mathrm{d}z = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$ dank HDI, also $= 0$ für γ geschlossen.

(Zur Erinnerung: Das Residuum von f in 0 ist $\operatorname{res}_0(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial B(z_0,r)} f(z)\,\mathrm{d}z$ für $r > 0$. Alternativ ist dies der Koeffizient a_{-1} in der Reihenentwicklung $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$. Die Ableitung ist dann $f'(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k a_k z^{k-1}$, und hier verschwindet der Term $0 \cdot a_0 z^{-1}$.)

Frage 2D. Sei $A\colon [a,b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ eine stetige Abbildung und seien $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ Lösungen der Differentialgleichung $u'(x) = A(x)\,u(x)$ und $v'(x) = A(x)\,v(x)$ für alle $x \in [a,b]$. Folgt aus gleichem Anfangswert $u(a) = v(a)$ bereits die Gleichheit $u(x) = v(x)$ für alle $x \in [a,b]$?

Begründete Antwort: ▶ Ja, ▶ dank Eindeutigkeitssatz für lineare Differentialgleichungssysteme.

(Diese grundlegende Eigenschaft haben wir zur Lösung jedes DGSystems $u' = Au$ genutzt: Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ zu jedem Startwert $u(x_0)$ garantieren uns, dass der Lösungsraum n–dimensional ist. Hierzu genügt bereits, dass $A(x)$ stetig ist.)

Frage 2E. Ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \cos(kx)$ die Fourier–Reihe einer quadrat–integrierbaren Funktion?

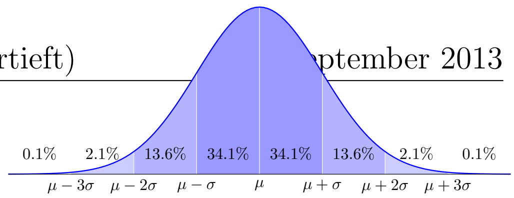
Begründete Antwort: ▶ Ja, ▶ denn die Koeffizienten sind quadrat–summierbar: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$.

(Für jede integrierbare Funktion $f\colon [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ mit Fourier–Reihe $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ gilt: Genau dann ist die Funktion f über $[0,2\pi]$ quadrat–integrierbar, das heißt $\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,dx < \infty$, wenn ihre Fourier–Koeffizienten quadrat–summierbar sind, das heißt $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 < \infty$.
Die Konvergenz der Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-s}$ wurde ausführlich in HM2 und HM3 behandelt.)

Frage 2F. Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)/x$ für $x \neq 0$ und $f(0) = 0$ ist über $\mathbb{R}$ nicht absolut integrierbar. Existiert dennoch der Grenzwert $\lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} f(x)\,dx$?

Begründete Antwort: ▶ Ja. ▶ Die Konvergenz folgt zum Beispiel mit dem Leibniz–Kriterium. Besser noch: Den Grenzwert haben wir mit dem Residuensatz explizit ausgerechnet!

(Zur Erinnerung: Absolute Konvergenz bedeutet $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx < \infty$. Das ist hier nicht der Fall, wie man am Graphen von $|f|$ durch Vergleich mit der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k = \infty$ sieht. Immerhin ist f uneigentlich integrierbar, insbesondere existiert obiger Cauchy–Hauptwert.)



Aufgabe 3. *Wahrscheinlichkeit (3+4+4 = 11 Punkte)*

Frage 3A. (Aus der ZEIT, Mai 2013) Sie würfeln dreimal unabhängig mit einem fairen sechsseitigen Würfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, hierbei mindestens eine Sechs zu würfeln? (Antwort als gekürzter Bruch) Ist diese Wahrscheinlichkeit größer, kleiner oder gleich 1/2?

Rechnung & Antwort:

▶ Die Wkt, überhaupt keine Sechs zu würfeln, ist $(5/6)^3 = 125/216$.

▶ Die Wkt, mindestens eine Sechs zu würfeln, ist demnach $1 - (5/6)^3 = 91/216 \approx 0.42$.

▶ Diese Wkt ist (deutlich) geringer als 1/2. (Das scheint plausibel, auch ohne Rechnung.)

Frage 3B. (Aus der NEW YORK TIMES, August 2011) Von drei gleich aussehenden Münzen sind zwei fair, zeigen also Kopf 0 und Zahl 1 mit gleicher Wkt, die dritte ist gezinkt und zeigt Kopf mit Wkt 60%. Sie wählen zufällig eine der Münzen aus und machen einen Testwurf. Wenn Sie Kopf erhalten, mit welcher Wkt ist Ihre Münze gezinkt? (Antwort als gekürzter Bruch)

Rechnung & Antwort:

▶ Sie wählen eine faire Münze mit Wkt $\mathbf{P}(F) = 2/3$ und die gezinkte mit Wkt $\mathbf{P}(\overline{F}) = 1/3$.

▶ Gegeben sind $\mathbf{P}(0|F) = \mathbf{P}(1|F) = 1/2$ sowie $\mathbf{P}(0|\overline{F}) = 0.6$ und $\mathbf{P}(1|\overline{F}) = 0.4$.

▶▶ Dank Bayes folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbf{P}(\overline{F}|0) = \frac{\mathbf{P}(0|\overline{F})\mathbf{P}(\overline{F})}{\mathbf{P}(0|\overline{F})\mathbf{P}(\overline{F}) + \mathbf{P}(0|F)\mathbf{P}(F)} = \frac{1/5}{1/5 + 1/3} = \frac{3}{8}.$$

(Vor dem Testwurf ist die Wkt $1/3 \approx 0.333$, nach dem Testwurf $3/8 = 0.375$. Das ist plausibel.)

Frage 3C. Ihre Maschine produziert 19200 Bauteile. Die anschließende Qualitätskontrolle für die höchste Güteklasse besteht jedes Bauteil mit Wkt 1/4, unabhängig von allen anderen. Mit welcher Wkt erhalten Sie mindestens 4700 Teile höchster Güte? (Antwort auf 1% gerundet)

Rechnung & Antwort:

▶▶ Erwartungswert $\mu = 19200 \cdot \frac{1}{4} = 4800$, Varianz $\sigma^2 = 4800 \cdot \frac{3}{4} = 3600$, Streuung $\sigma = 60$.

▶ Mindestens 4700 Teile bedeutet $X \geq \mu + \alpha\sigma$ mit $\alpha = (4700 - \mu - 1/2)/\sigma = -1.675$.

▶ Wir erhalten $P = \int_{-1.675}^{\infty} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0.5 + \int_0^{1.675} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \approx 0.953$, also $P \approx 95\%$.

Aufgabe 4. *Differentialgleichungen (3+3+3+3 = 12 Punkte)*

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen für reelle Funktionen $u, v, w, y \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Die Gleichungen sind untereinander eng verwandt, das können und sollen Sie ausnutzen.

Frage 4A. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $u''(x) - 4u'(x) + 4u(x) = 0$.

Rechnung:

▶ Das charakteristische Polynom $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$ hat die doppelte Nullstelle $x = 2$.
Ein Fundamentalsystem dieser Gleichung ist demnach ▶ $u_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$ und ▶ $u_2 = x\mathrm{e}^{2x}$. (Probe!)
Allgemeine Lösung ist demnach die Linearkombination $u(x) = (c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Allgemeine Lösung $u(x) =$ $(c_1 + c_2 x)\,\mathrm{e}^{2x}$ mit $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Frage 4B. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = \mathrm{e}^{2x}$.

Ansatz & Rechnung:

▶ Es liegt (doppelte) Resonanz vor, also machen wir den Ansatz

$$v(x) = cx^2\mathrm{e}^{2x} \quad \text{mit} \quad c \in \mathbb{R}.$$

▶ Ableiten $v'(x) = c(2x + 2x^2)\mathrm{e}^{2x}$ und $v''(x) = c(2 + 8x + 4x^2)\mathrm{e}^{2x}$ ergibt

$$v''(x) - 4v'(x) + 4v(x) = 2c\mathrm{e}^{2x} \quad \stackrel{!}{=} \quad \mathrm{e}^{2x}.$$

▶ Der Ansatz löst die Gleichung für $c = 1/2$. (Probe!)

Partikulärlösung $v(x) =$ $\dfrac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$

Frage 4C. Bestimmen Sie eine Partikulärlösung von $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = \cos(x)$.

Ansatz & Rechnung: Für die rechte Seite $\cos x = \operatorname{Re}(e^{ix})$ liegt keine Resonanz vor.
▶ Wir machen daher den Ansatz $w(x) = a\cos x + b\sin x$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
▶ Ableiten $w'(x) = -a\sin x + b\cos x$ und $w''(x) = -a\cos x - b\sin x$ und Einsetzen führt zu der Gleichung $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = (3a - 4b)\cos x + (4a + 3b)\sin x \stackrel{!}{=} \cos x$.
▶ Koeffizientenvergleich $3a - 4b \stackrel{!}{=} 1$ und $4a + 3b \stackrel{!}{=} 0$ ergibt $a = 3/25$ und $b = -4/25$.
Wir erhalten somit die Lösung $w(x) = \frac{3}{25}\cos(x) - \frac{4}{25}\sin(x)$. (Probe!)

Alternativ führt auch der ▶ komplexe Ansatz $w(x) = ce^{ix}$ mit $c \in \mathbb{C}$ zum Ziel:
▶ Ableiten $w'(x) = cie^{ix}$ und $w''(x) = -ce^{ix}$ ergibt $w''(x) - 4w'(x) + 4w(x) = c(3 - 4i)e^{ix} \stackrel{!}{=} e^{ix}$.
Für die Konstante c finden wir somit $c = (3 - 4i)^{-1} = (3 + 4i)/25$, also

$$w(x) = \frac{3 + 4i}{25}e^{ix} = \left(\frac{3}{25}\cos x - \frac{4}{25}\sin x\right) + i\left(\frac{4}{25}\cos x + \frac{3}{25}\sin x\right)$$

▶ Der Realteil $\frac{3}{25}\cos(x) - \frac{4}{25}\sin(x)$ ist die gesuchte reelle Lösung. (Probe!)

Partikulärlösung $w(x) = \dfrac{3}{25}\cos(x) - \dfrac{4}{25}\sin(x)$

Frage 4D. Lösen Sie $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 25\cos(x)$ mit $y(0) = 5$ und $y'(0) = 1$.

Ansatz & Rechnung:
▶ Die allgemeine Lösung entnehmen wir als Linearkombination den vorigen Antworten:

$$y(x) = u(x) + 2v(x) + 25w(x) = (c_1 + c_2x + x^2)e^{2x} + 3\cos(x) - 4\sin(x)$$

Dank Linearität erfüllt y die Gleichung $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 2e^{2x} + 25\cos(x)$.
Wir wollen schließlich das AWP lösen. ▶ Ableiten ergibt

$$y'(x) = (c_2 + 2x)e^{2x} + 2(c_1 + c_2x + x^2)e^{2x} - 3\sin(x) - 4\cos(x)$$

Einsetzen führt zu den Gleichungen $y(0) = c_1 + 3 \stackrel{!}{=} 5$ und $y'(0) = 2c_1 + c_2 - 4 \stackrel{!}{=} 1$.
▶ Die gesuchten Konstanten sind demnach $c_1 = 2$ und $c_2 = 1$. (Probe: Beim Endergebnis sowie bei jeder der Teilfragen A,B,C kann man durch Einsetzen der gefundenen Lösung leicht prüfen, ob sie die geforderte Gleichung löst. Rechenfehler können so erkannt und behoben werden.)

Lösung $y(x) = (2 + x + x^2)e^{2x} + 3\cos(x) - 4\sin(x)$

Aufgabe 5. *Differentialgleichungssysteme (4+2+4+2 = 12 Punkte)*

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $y'(t) = A\,y(t)$ mit der Koeffizientenmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \mathrm{i} \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Frage 5A. Berechnen Sie die Bildvektoren Av_1, Av_2, Av_3, Av_4 in $\mathbb{C}^4$ und schreiben Sie jeden als Linearkombination bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$.

Rechnung & Antwort: ▶▶▶▶ Direktes Ausrechnen und scharfes Hinsehen ergibt

$$Av_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathrm{i}v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4, \qquad Av_2 = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 - \mathrm{i}v_2 + 0v_3 + 0v_4,$$

$$Av_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3 + 0v_4, \qquad Av_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0v_1 + 0v_2 + 1v_3 + 0v_4.$$

Unsere Basis besteht aus den Eigenvektoren v_1, v_2, v_3 und dem Hauptvektor v_4 zweiter Stufe. Dies wird besonders übersichtlich, wenn wir A bezüglich der Basis (v_1, v_2, v_3, v_4) schreiben…

Frage 5B. Schreiben Sie die lineare Abbildung A als Matrix $B = {}_{\mathscr{B}}(A)_{\mathscr{B}}$ bezüglich der Basis $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und lesen Sie hieraus das charakteristische Polynom von A ab.

Antwort: ▶ Die Spalten von B sind die obigen Koordinatenvektoren bezüglich $\mathscr{B}$:

$$B = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▶ Die Matrizen $A \sim B$ sind konjugiert. Hieraus folgt das charakteristische Polynom

$$P_A(x) = P_B(x) = (x - \mathrm{i})(x + \mathrm{i})(x - 0)^2 = x^4 + x^2.$$

(Alternativ kann man direkt $\det(A - xE)$ entwickeln, aber das ist spürbar mühsamer. Es ist geschickter, die bereits vorliegende Information zu verstehen und auszunutzen.)

Frage 5C. Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem $y_1, y_2, y_3, y_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ der Differentialgleichung $y' = A\,y$ zu den vorgegebenen Anfangswerten $y_1(0) = (1,0,0,0) = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$ und $y_2(0) = (0,0,1,0) = \frac{\mathrm{i}}{2}(v_1 - v_2)$ sowie $y_3(0) = v_3$ und $y_4(0) = v_4$.

Antwort: Nach obiger Vorarbeit können wir direkt unsere Lösungsformeln einsetzen.

Aus den komplexen Lösungen $\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} v_1$ und $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} v_2$ erhalten wir die Linearkombinationen

$$\blacktriangleright\ y_1(t) = \tfrac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} v_1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} v_2\right] = \begin{pmatrix} \cos t \\ 0 \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \blacktriangleright\ y_2(t) = \tfrac{\mathrm{i}}{2}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} v_1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} v_2\right] = \begin{pmatrix} -\sin t \\ 0 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aus dem Eigenvektor v_3 und dem Hauptvektor v_4 zum Eigenwert 0 erhalten wir

$$\blacktriangleright\ y_3(t) = \mathrm{e}^{0t} v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad\text{und}\quad \blacktriangleright\ y_4(t) = \mathrm{e}^{0t}(v_4 + t v_3) = \begin{pmatrix} 1+t \\ 1 \\ 1+t \\ 1+t \end{pmatrix}.$$

Diese Lösungen $y_1, y_2, y_3, y_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ erfüllen die gewünschten Anfangsbedingungen. (Probe!)

Frage 5D. Wenn Sie zufällig (stetig verteilt) einen Startvektor $y(0) \in \mathbb{R}^4$ wählen und die zugehörige Lösung von $y'(t) = A\,y(t)$ verfolgen, welchen Grenzwert $\lim_{t\to\infty} |y(t)|$ erwarten Sie?

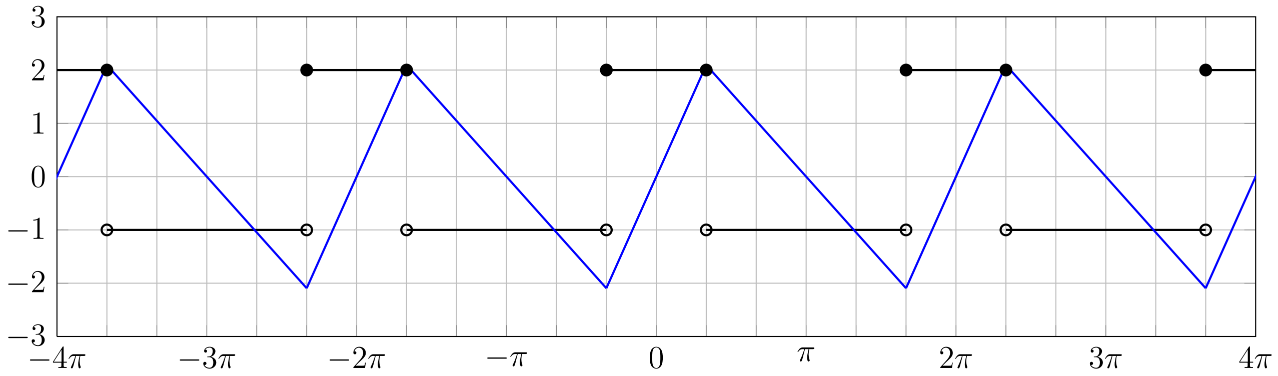
Antwort: ▶ Die Lösungen y_1, y_2, y_3 sind beschränkt, hingegen gilt $|y_4(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$. Für jede Lösung $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + c_3 y_3(t) + c_4 y_4(t)$ mit $c_4 \neq 0$ gilt somit $|y(t)| \to \infty$.

▶ Bei zufälliger Wahl des Startwerts $y(0)$ sind mit Wahrscheinlichkeit 1 alle Koeffizienten c_1, c_2, c_3, c_4 ungleich Null, also gilt $|y(t)| \to \infty$ für $t \to \infty$.

(Für $y'(t) = A\,y(t)$ ist der Startwert 0 ein Fixpunkt. Dieser Fixpunkt ist jedoch nicht stabil, denn eine kleine Auslenkung wird im Laufe der Zeit immer größer und führt von 0 weg. Stetige Verteilung erhält man durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f \colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\int_{\mathbb{R}^4} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.)

Aufgabe 6. *Fourier–Reihen (2+3+2+4 = 11 Punkte)*

Frage 6A. Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gerade und 2π–periodisch mit $f(x) = 2$ für $0 \le x \le \pi/3$ und $f(x) = -1$ für $\pi/3 < x \le \pi$. Skizzieren Sie f und $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ auf dem Intervall $[-4\pi, 4\pi]$.



Frage 6B. Entwickeln Sie f in ihre Fourier–Reihe $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. Dabei brauchen Ausdrücke wie $\sin(k\pi/3)$ oder $\cos(k\pi/3)$ nicht weiter vereinfacht zu werden.

Rechnung & Antwort: ▶ Da f gerade ist, erhalten wir $b_k = 0$ für alle k.

▶▶ Die Koeffizienten a_k für $k \in \mathbb{N}_{\ge 1}$ rechnen wir direkt aus:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\cos(kx)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{\pi}\int_{\pi/3}^{5\pi/3}\cos(kx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{k\pi}\Big[\sin(kx)\Big]_{-\pi/3}^{\pi/3} - \frac{1}{k\pi}\Big[\sin(kx)\Big]_{\pi/3}^{5\pi/3} = \frac{6}{k\pi}\sin(k\pi/3) \end{aligned}$$

Zudem gilt $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, wie man ausrechnet oder an obiger Zeichnung abliest. Ausgeschrieben ergibt das die Fourier–Reihe

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k\pi}\sin(k\pi/3)\cos(kx).$$

Frage 6C. Entwickeln Sie F in ihre Fourier–Reihe $F(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(kx) + B_k \sin(kx)$.

Rechnung & Antwort: ▶ Da F ungerade ist, erhalten wir $A_k = 0$ für alle k.

▶ Wegen $F = \int f$ erhalten wir $B_k = a_k/k$ durch termweise Integration, also

$$F(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^2\pi}\sin(k\pi/3)\sin(kx).$$

Die folgenden Werte können wir nun einsetzen, um die Koeffizienten explizit auszurechnen:

k	0	1	2	3	4	5	6	…
$\cos(k\pi/3)$	1	$1/2$	$-1/2$	-1	$-1/2$	$1/2$	1	…
$\sin(k\pi/3)$	0	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}/2$	0	$-\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}/2$	0	…

Frage 6D. Werten Sie diese Reihen in $x = \pi/3$ aus und bestimmen Sie so die Grenzwerte

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\sqrt{3}} \sin(k\pi/3)\cos(k\pi/3) \qquad \left(= \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \dots\right) \quad \text{und}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3k^2} \sin(k\pi/3)^2 \qquad \left(= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots\right).$$

Rechnung & Antwort: Unsere Funktion f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ rechts- und linksseitig stetig sowie rechts- und linksseitig differenzierbar. Nach dem Satz von Dirichlet konvergiert ihre Fourier–Reihe gegen den Mittelwert $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$. Gleiches gilt für F.

▶ Im Punkt $x = \pi/3$ erhalten wir $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)] = 1/2$. ▶ Also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k\sqrt{3}} \sin(k\pi/3)\cos(k\pi/3) = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \qquad \left(\approx 0.6045997\dots\right)$$

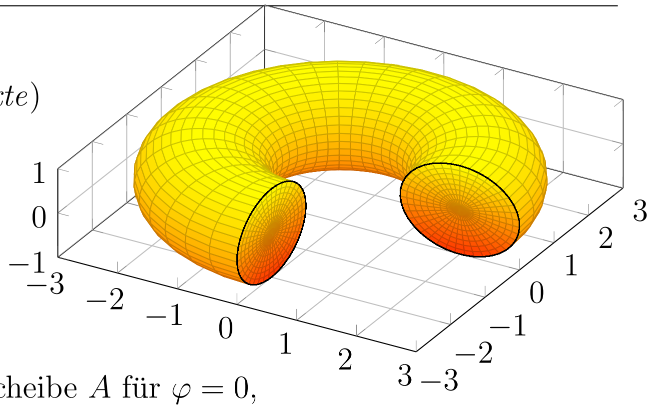
▶ Im Punkt $x = \pi/3$ erhalten wir $\frac{1}{2}[F(x+) + F(x-)] = F(x) = 2\pi/3$. ▶ Also

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3k^2} \sin(k\pi/3)^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi^2}{27} \qquad \left(\approx 1.4621636\dots\right)$$

Aufgabe 7. *Integralsätze (3+3+3+3 = 12 Punkte)*

Wir betrachten drei Viertel eines Volltorus:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} (2+\rho\sin\theta)\cos\varphi \\ (2+\rho\sin\theta)\sin\varphi \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{matrix} 0 \le \rho \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le \varphi \le 3\pi/2 \end{matrix} \right\}$$



Die Randfläche $S = \partial V$ besteht aus einer Kreisscheibe A für $\varphi = 0$, einer weiteren Kreisscheibe B für $\varphi = 3\pi/2$, sowie der Mantelfläche C für $\rho = 1$.

Für das Vektorfeld $f(x,y,z) = (x, y, x^2 + 4(y+2)^3)$ gilt $\operatorname{rot}(f)(x,y,z) = \big(12(y+2)^2, -2x, 0\big)$.

Frage 7A: Berechnen Sie möglichst geschickt den Fluss von f durch S nach außen.

Rechnung:

▶ Am besten geht es mit dem Satz von Gauß, denn $\operatorname{div}(f) = 2$ ist besonders einfach.

▶ Der Volltorus hat das Volumen $\pi r^2 \cdot 2\pi R$, etwa nach der Guldinschen Regel.
Mit $r = 1$ und $R = 2$ haben drei Viertel also das Volumen $\operatorname{vol}_3(V) = 3\pi^2$.

▶ Hieraus folgt $\int_S f \cdot \mathrm{d}S = \int_V \operatorname{div}(f)\,\mathrm{d}V = 2\operatorname{vol}_3(V) = 6\pi^2$.

Frage 7B: Berechnen Sie die Normale und den Fluss von $\operatorname{rot}(f)$ durch A nach außen.

Normale $\partial_\theta \times \partial_\rho$ auf A: ► Für $\varphi = 0$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} 2+\rho\sin\theta \\ 0 \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 2+\rho\sin\theta \\ 0 \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\cos\theta \\ 0 \\ -\rho\sin\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sin\theta \\ 0 \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Dies entspricht der Einheitsnormalen $(0,-1,0)$ mal der Funktionaldeterminante ρ.)

Flussintegral: ►► Die obige Normale auf A zeigt von V nach außen, also erhalten wir

$$\int_A \operatorname{rot}(f)\cdot \mathrm{d}A = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 2(2+\rho\sin\theta)\rho \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = 4\pi$$

(Alternativ kann man den Integralsatz von Stokes nutzen und $\int_{\partial A} f\cdot \mathrm{d}s$ berechnen.)

Frage 7C: Berechnen Sie die Normale und den Fluss von $\operatorname{rot}(f)$ durch B nach außen.

Normale $\partial_\rho \times \partial_\theta$ auf B: ► Für $\varphi = 3\pi/2$ erhalten wir

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\begin{pmatrix} 0 \\ -2-\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} \times \frac{\partial}{\partial\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ -2-\rho\sin\theta \\ \rho\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -\rho\cos\theta \\ -\rho\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Dies entspricht der Einheitsnormalen $(1,0,0)$ mal der Funktionaldeterminante ρ.)

Flussintegral: ►► Die obige Normale auf B zeigt von V nach außen, also erhalten wir

$$\int_B \operatorname{rot}(f)\cdot \mathrm{d}B = \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{2\pi} 12\rho^3\sin^2\theta \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = 12\pi\int_{\rho=0}^{1}\rho^3\,\mathrm{d}\rho = 3\pi$$

(Alternativ kann man den Integralsatz von Stokes nutzen und $\int_{\partial B} f\cdot \mathrm{d}s$ berechnen.)

Frage 7D: Folgern Sie mit einem Integralsatz den Fluss von $\operatorname{rot}(f)$ durch C nach außen.

Rechnung & Antwort: ► Wir haben $\partial S = \emptyset$. ► Nach dem Integralsatz von Stokes gilt

$$\int_A \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}A + \int_B \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}B + \int_C \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}C = \int_S \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}S = \int_{\partial S} f\cdot\mathrm{d}s = 0$$

► Ohne weitere Mühen folgt $\int_C \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}C = -\int_A \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}A - \int_B \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}B = -7\pi$.

Alternativ erhält man dieses Ergebnis auch mit dem Integralsatz von Gauß, denn $\operatorname{div}\operatorname{rot}(f) = 0$. Man kann das Flussintegral $\int_C \operatorname{rot}(f)\cdot\mathrm{d}C$ auch direkt ausrechnen, das ist aber etwas mühsamer.