Blatt 11: Zelluläre Homologie

1. Zelluläre Homologie

S 1.1. Berechnen Sie die Homologiegruppen der folgenden 2-Komplexe:

(a) Der Quotient von S^2 durch Identifikation des Nord- und Südpols zu einem Punkt.

(b) $S^1 \times (S^1 \wedge S^1)$.

(c) Der Quotient von $S^1 \times S^1$, den man erhält, indem man Punkte auf $S^1 \times \{x_0\}$, die sich um eine Rotation um $2\pi/m$ unterscheiden, und Punkte auf $\{x_0\} \times S^1$, die sich um eine Rotation um $2\pi/n$ unterscheiden, identifiziert.

Ü 1.2. Berechnen Sie die Homologiegruppen der folgenden topologischen Räume:

(a) X ist der Quotient von S^2 nach Identifikation von gegenüberliegenden Punkten auf dem Äquator.

(b) X ist der Quotient von S^3 nach Identifikation von gegenüberliegenden Punkten auf dem Äquator $S^2 \subset S^3$.

Ü 1.3. Berechnen Sie $H_i(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^m)$ für $m < n$ durch zelluläre Homologie. Benutzen Sie dafür die Standardzellstruktur von $\mathbb{R}P^n$ mit $\mathbb{R}P^m$ als m-Skelett.

2. Euler Charakteristik

Ü 2.1. Zeigen Sie, dass für endliche Zellkomplexe X und Y gilt, dass $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$, wobei χ die Euler-Charakteristik bezeichne.

Ü 2.2. Sei X ein Zellkomplex, der als Vereinigung von Unterkomplexen A und B geschrieben werden kann. Zeigen Sie, dass $\chi(X) = \chi(A) + \chi(B) - \chi(A \cap B)$.

S 2.3. Die Sphäre S^2 entstehe durch Identifizierung von Kanten einer endlichen Menge von Polygonen. Zeigen Sie, dass das 1-Skelett des zugehörigen Zellkomplexes niemals der vollständige Graph auf 5 Ecken, K_5, oder der vollständige bipartite Graph $K(3,3)$ sein kann.