Blatt 10: Homologie, Homologieaxiome

1. Homologie

Ü 1.1. Berechnen Sie die relative Homologiegruppe $H^1(\mathbb{R},\mathbb{Q})$.

Ü 1.2. Sei X und Y topologische Räume, und seien $A \subseteq X$ und $B \subseteq Y$. Sei weiterhin $f : (X,A) \to (Y,B)$ eine Abbildung von Paaren, so dass sowohl $f : X \to Y$ als auch die Einschränkung $f : A \to B$ Homotopieäquivalenzen sind.

(a) Zeigen Sie, dass $f_* : H_n(X,A) \to H_n(Y,B)$ ein Isomorphismus ist für alle n.

(b) Zeigen Sie für den Falle der Einbettung $f : (D^n, S^{n-1}) \to (D^n, D^n \setminus \{0\})$, dass f keine Homotopieäquivalenz von Paaren ist, es also keine Abbildung von Paaren $g : (D^n, D^n \setminus \{0\}) \to (D^n, S^{n-1})$ gibt, so dass fg und gf homotop zur Identitätsabbildung sind durch Abbildungen von Paaren.

S 1.3. Die lokalen Homologiegruppen eines topologischen Raumes X an der Stelle $x \in X$ sind gegeben durch $H_n(X, X \setminus \{x\})$.

(a) Zeigen Sie, dass die lokale Homologie in einem beliebig kleinen offenen Teilraum U mit $x \in U$ berechnet werden kann.

(b) Sei X der Kegel über dem 1-Skelett des Simplex Δ^3. Berechnen Sie die lokalen Homologiegruppen für alle $x \in X$.

(c) Sei $\partial X = \{x \in X \mid H_n(X, X \setminus \{x\}) = 0\}$. Berechnen Sie die lokalen Homologiegruppen von $H_n(\partial X, \partial X \setminus \{x\})$.

2. Homologieaxiome

Ü 2.1. Seien X und Y topologische Räume und sei $X+Y$ die topologische Summe von X mit Y. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Eilenberg–Steenrod–Axiome, dass $H_n(X) \oplus H_n(Y) \cong H_n(X+Y)$.

Ü 2.2. Zeigen Sie nur unter Verwendung der Eilenberg–Steenrod–Axiome, dass $H_n(\emptyset) = 0$ und $H_n(X,X) = 0$ für alle i.

S 2.3. Sei X ein topologischer Raum. Für jeden Teilraum $A \subseteq X$, sei $T_n(X,A)$ die Torsionsuntergruppe von $H_n(X,A)$. Definiert T_n mit den offensichtlichen induzierten Abbildungen $T_n(X,A) \to T_n(Y,B)$ und Verbindungsmorphismen $T_n(X,A) \to T_{n-1}(A)$ eine Homologietheorie?