Blatt 9: Homologieaxiome, Mayer-Vietoris Sequenz, relative Homologiegruppen

1. Mayer-Vietoris Sequenz

Ü 1.1. Sei K ein Simplizialkomplex und seien $A, B \subset K$ Teilkomplexe sodass $K = A \cup B$. Zeigen Sie, dass es eine exakte Sequenz gibt:

$$\cdots \longrightarrow H_n(A \cap B) \longrightarrow H_n(A) \oplus H_n(B) \longrightarrow H_n(K) \longrightarrow H_{n-1}(A \cap B) \longrightarrow \cdots$$

Die Sequenz heißt *Mayer–Vietoris–Sequenz* (MVS).

Berechnen Sie mit der MVS die Homologiegruppen der Sphären (mit beliebiger Triangulierung).

Ü 1.2. Berechnen Sie mit der MVS die Homologiegruppen der kompakten Flächen (mit und ohne Rand)

S 1.3. Seien $p, p' \in \mathbb{R}$ zwei disjunkte Punkte und $X = \{p_1, p_2\}$. Berechnen Sie die Homologiegruppen und reduzierten Homologiegruppen von X und der Einhängung ΣX.

Seien K und L Simplizialkomplexe, $f : K \to L$ eine simpliziale Abbildung und $\Sigma f : \Sigma K \to \Sigma L$ die Einhängung von f. Zeigen Sie, dass $\tilde{H}_*(\Sigma K) \cong S\tilde{H}_*(K)$ und $\tilde{H}_*(\Sigma f) \cong S\tilde{H}_*(f)$ wobei S der Shift-Funktor ist, i.e. $S\tilde{H}_n(K) = \tilde{H}_{n-1}(K)$.

1.4. Sei $f : S^n \to S^n$. Zeigen Sie, dass $\Sigma S^n = S^{n+1}$ und dass $\deg(\Sigma f) = \deg(f)$, wobei $\deg(f)$ den Abbildungsgrad von f bezeichne.

2. Homologieaxiome

Ü 2.1. Berechnen Sie nur unter Verwendung der Eilenberg–Steenrod–Axiome (für die simpliziale Homologie) die Homologiegruppen der Sphären (beliebig trianguliert).

S 2.2. Berechnen Sie nur unter Verwendung der Eilenberg–Steenrod–Axiome die Homologie der Einhängung ΣX eines Simplizialkomplexes K.

3. relative Homologiegruppen

Ü 3.1. Seien K ein Simplizialkomplex und L ein Teilkomplex. Zeigen Sie, dass $H_0(K, L)$ eine freie Abelsche Gruppe ist vom Rang genau der Anzahl der Komponenten von K, die L nicht trifft.

3.2. Sei CK der Kegel über L. Zeigen Sie, dass in der langen exakten Homologiesequenz von (CK, K) der Randoperator $\partial_* : H_q(CK, K) \to H_{q-1}(K)$ für $q > 1$ ein Isomorphismus ist. Gilt dies auch für $q = 1$?