Blatt 8: Simpliziale Homologie und der Fixpunktsatz von Lefschetz

1. Simpliziale Homologie

Berechnen Sie die simplizialen Homologiegruppen der folgenden topologischen Räume X:

Ü 1.1. $X = S^2 \cup \{(x_1, x_2, x_3) \in D^3 \mid x_1 x_2 x_3 = 0\}$. Berechnen Sie hier auch die relativen Homologiegruppen $H_n(X, A)$ für $A = S^2$.

1.2. X ist der kombinatorische Simplizialkomplex der aus allen Untermengen der Mengen $\{1,2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}$ und $\{5\}$ besteht.

S 1.3. X ist der "Dreiecksfallschirm", i.e. der Standard 2-Simplex nach Identifizierung seiner drei Eckpunkte.

2. Fixpunktsatz von Lefschetz

Ü 2.1. Benutzen Sie den Lefschetzschen Fixpunktsatz um zu zeigen, dass jede stetige Abbildung f von der n-Sphäre auf sich selbst einen Fixpunkt hat, außer wenn f den Abbildungsgrad $(-1)^{n+1}$ hat, i.e. die induzierte Abbildung $f_* : H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ genau Multiplikation mit $(-1)^{n+1}$ entspricht.

Ü 2.2. Sei $X = T\#T\#T$ die verbundene Summe dreier Tori und sei $f : X \to X$ Rotation um 180° um die Achse, die vertikal durch das Loch des mittleren Torus verlaufe. Wählen Sie eine Basis für H_* und berechnen Sie die Lefschetz-Zahl.

Zeigen Sie (oder widerlegen und reparieren Sie) folgende Aussage:

S 2.3. Sei K ein endlicher Simplizialkomplex und sei $f\colon K \to K$ eine simpliziale Abbildung. Dann ist die Fixpunktmenge von $|f|\colon |K| \to |K|$ ein simplizialer Teilkomplex der baryzentrischen Unterteilung K' von K, und die Lefschetz–Zahl von f ist die Euler–Charakteristik der Fixpunktmenge, kurz $\Lambda(f) = \chi(\mathrm{fix}(|f|))$.

Für stetige Abbildungen $f\colon |K| \to |K|$, die nicht simplizial sind, gilt obige Gleichung im Allgemeinen nicht. Finden Sie möglichst drastische Beispiele:

Ü 2.4. Konstruieren Sie Beispiele in Dimension $\dim K = 1$ mit $\Lambda(f) = 0$ aber $\chi(\mathrm{fix}(|f|)) = n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{N}$.

2.5. Finden Sie auch Beispiele mit $\Lambda(f) = 0$ aber $\chi(\mathrm{fix}(|f|)) = n$ mit beliebigem $n \in \mathbb{Z}$?