Blatt 7: Homologische Algebra

1. Fünfer-Lemma

S 1.1. Vervollständigen Sie den Beweis den Fünfer-Lemmas aus der Vorlesung, i.e. zeigen Sie, dass wenn das Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \downarrow{\scriptstyle\delta} & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & D' & \longrightarrow & E' \end{array}$$

kommutativ ist mit exakten Zeilen, β und δ surjektiv sind und ε injektiv ist, dann ist γ surjektiv.

Ü 1.2. Geben Sie ein Beispiel über dem Ring $\mathbb{Z}$ an, das zeigt, dass der oben angegebene Teilfall des Fünfer-Lemma nicht gilt, wenn ε nicht injektiv ist.

2. Schlangenlemma

Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von R-Moduln mit exakten Zeilen:

$$\begin{array}{ccccccc} & & A & \xrightarrow{\theta} & B & \xrightarrow{\varphi} & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \xrightarrow{\theta'} & B' & \xrightarrow{\varphi'} & C' & & \end{array}$$

Ü 2.1. Zeigen Sie, dass für die Sequenz

$$\operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\theta_*} \operatorname{Ker}\beta \longrightarrow \operatorname{Ker}\gamma \longrightarrow \operatorname{Coker}\alpha \longrightarrow \operatorname{Coker}\beta \xrightarrow{\varphi'_*} \operatorname{Coker}\gamma$$

aus dem Schlangenlemma gilt:

(a) Die Sequenz ist exakt an der Stelle $\operatorname{coker}\alpha$.

(b) Ist θ injektiv und ist φ' surjektiv, so ist auch θ_* injektiv und φ'_* surjektiv.

3. Lange exakte Homologiesequenz

S 3.1. Gegeben sei die kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

wobei die zu A, B und C gehörenden Randhomomorphismen jeweils α_i, β_i bzw. γ_i seien.

(a) Benutzen Sie das Schlangenlemma und Eigenschaften von Kettenkomplexen, um zu zeigen, dass es Abbildungen $\overline{\varepsilon_i} : \operatorname{Coker}\varepsilon_{n+1} \to \operatorname{Ker}\varepsilon_{n-1}$ für $\varepsilon \in \{\alpha, \beta, \gamma\}$ gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert und die Zeilen exakt sind:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \operatorname{Coker}\alpha_{n+1} & \xrightarrow{\theta_*} & \operatorname{Coker}\beta_{n+1} & \xrightarrow{\varphi_*} & \operatorname{Coker}\gamma_{n+1} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\ 0 & \longrightarrow & \operatorname{Ker}\alpha_{n-1} & \xrightarrow{\theta'_*} & \operatorname{Ker}\beta_{n-1} & \xrightarrow{\varphi'_*} & \operatorname{Ker}\gamma_{n-1} & & \end{array}$$

(b) Benutzen Sie dies, um die Existenz der langen exakten Homologiesequenz zu beweisen.

Ü 3.2. Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm von Kettenkomplexen

$$\begin{array}{ccccc} A'' & \longrightarrow & A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B'' & \longrightarrow & B & \longrightarrow & B' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ C'' & \longrightarrow & C & \longrightarrow & C' \end{array}$$

wobei die Spalten und Zeilen jeweils kurze exakte Sequenzen von Kettenkomplexen seien. Zeigen Sie, dass man Diagramme von der Form

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(C') & \xrightarrow{\partial_C} & H_n(C'') \\ \downarrow{\scriptstyle \partial'} & & \downarrow{\scriptstyle \partial''} \\ H_n(A') & \xrightarrow{\partial_A} & H_{n-1}(A'') \end{array}$$

erhält, wobei das Diagramm anti-kommutativ ist, es gilt also $\partial''\partial_C + \partial_A\partial' = 0$.